OFTERDINGER

EX[illegible]

PRINCIPIA CALCULI

N. 12

METHODORUM

EXPOSITIO, QUARUM OPE PRINCIPIA CALCULI SUPERIORIS INVENTA SUNT.

PARS PRIOR.

DISSERTATIO

QUAM

AD CONSEQUENDOS AB AMPLISSIMO UNIVERSITATIS BEROLINENSIS PHILOSOPHORUM ORDINE SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES,

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

LUDOV. FELIX OFTERDINGER

WUERTTEMBERGENSIS.

BEROLINI, TYPIS BRÜSCHCKIANIS.

MDCCCXXXI.

Sectio I.

De veterum methodo, per explosum excessum atque defectum vocata.

§. 1.

Quae veteribus audit per explosum, excessum atque defectum methodus 1), ea est theorematum nonnullorum e limitum theoria applicatio, qua lineas rectas, plana rectilinea, solida planis conclusa, cum curvis, curvis planis et solidis, quae curvis planis concluduntur, comparabant. Hujus ope methodi, quae immediate inveniri non possunt, quantitates, cum aliis solebant conferre, quibus non

1) C. Renaldini de resolutione et compositione mathematica lib. II. Patavi 1668. pag. 236. seq. — Traité des fluxions par Mac-Laurin, traduite par Pezenas. Paris 1749. pag 1. — XI. — Klügels mathematisches Wörterbuch sub. Exhaustionismethode. — Reflexions sur la methaphisique du calcul infinitéesimal par Carnot ed. 2. Paris 1814. pag. 134. seq.

aequales erant quidem, at plus, quam ulla data data quantitas, poterant approximari.

Principe utebantur theoremate hoc.

Si duae datae fuerint quantitates inaequales, earum differentia continuo augendo ad se ipsam, respective major fieri potest, qualibet data quantitate.

§. 2.

Videtur mihi Eudoxus fuisse, qui primus methodum per explosum, excessum atque defectum docuerit, cujus rei testis mihi sit Archimedes, qui eum theorematum quorundam inventorem vocat, quae, non nisi illa adhibita ratione, demonstrari possunt, nominatim vero septimi et decimi, quae sunt in elementorum duodecimo libro 1). Neque vero horum tantummodo probabile est, fuisse auctorem Eudoxum, sed omnium libri duodecimi theorematum, in quibus illius methodi fit applicatio 2).

---

1) Archimenes de sphaera et cylindro, praefat.

2) Euclids 6 erste Bücher nebst dem eilften und zwölften der Elemente mit Verbesserungen und Anmerkungen von Simson, übersetzt von Roeder, herausgegeben von Niesert. Paderborn 1806. pag. 740. Pfleiderer thesium inauguralium pars mathematico physica. Tübingae 1792. XII. — XVIII.

Sunt autem ista tceoremata 2. 5. 10. 11. 12. 18. XII. 1)

Cujus methodi via, ut clarius illustretur, primo theorematum, quae citavi, libet exemplo uti:

Circulum proportio est duplicata proportionis diametrorum.

Positis duobus circulis K et k, atque diametris eorum respectivis D et d, erit $K:k=D^2\ d^2$.

Posito autem, non esse hanc rationem, sed sit potius

$D^2 : d^2 >< K : k$

et $D^2 : d^2 = K : \Delta k$, ubi respective $\Delta k <> k$.

1. Posito $\Delta k < k$, inscribatur quadratum circulo k et duplicato laterum ejusdem numero, donec eorum, quae supersunt, segmentorum summa $< k - \Delta k$ fuerit, tum, si et ipsi circulo K polygon inscribatur, quod illi in circulo k simile fuerit, amboque respective nominibus P et p significentur, erit $p > \Delta k$.

Jam vero $P : p = D^2 : d^2$ (XII. 1.)

$$\frac{K : \Delta k = D^2 : d^2 \text{ (ex hyp.)}}{P : p = K : \Delta k}$$

est $K > P$ ergo etiam $\Delta k > p$. q. a.

---

1) Pfleiderer de dimensione circuli. Dissert. Tubingae 1787 — 1790. pars 2. — ejusd. thesium inauguralium pars mathematico-physica. Tüb. 1790 I. — XVIII.

2. Si fuerit $\Delta k > k$, eadem erit demonstratio.

§. 3.

Eandem plane viam ingressus est Archimedes in libro de circuli dimensione. Idem vero nova genera ejusdem methodi tria invenit, unum in libro de sphaera et cylindro I. 14. 15. 35. 36. 48. 50., alterum in theorematis 23. 25. 29. libri de conoidibus et sphaeoidibus, tertium semel tantummodo in theoremate 23 libri de parabolae quadratum, expositum.

Exemplo utor primo theoremate XIV. libri primi de sphaera et cylindro, quod ita sese habet.

Cylindri recti tunica circulo est aequalis, cujus radius media proportionalis est inter latus et diametrum baseos cylindri.

Hoc in theoremate planum curvam cum circulo comparatur, quem ad finem Archimedes polygonis utitur et prismatibus, quae circulo et cylindri tunicae respective sese appropinquant, simili plane modo, ut fit in theoremate 2 libri Elementorum duodecimi. Constructio et praecipua argumentationis momenta, e theorematis desumpta superioribus, haec sunt: posito, circulum non esse aequalem cylindri tunicae, aut major erit aut minor. Sit primo minor, polygona inter sese similia inscribantur et circumscribantur circulo et tertium eis simile basi cylindri, deinde erecto in eo prismate,

quod sit cylindro aeque altum, polygon circa basin cylindri constructum, aequale erit triangulo, cujus basis polygoni peripheriae et cujus altitudo circuli radio aequalis est, prismatis autem tunica aequalis erit triangulo, cujus altitudo cylindri latus et cujus basis duplicatam polygoni peripheriam, circa cylindri basin constructi aequat.

Deinde ostenditur, triangulum hoc, polygonono esse aequale circa circulum constructo, unde sequitur:

Prismatis tunicam: cylindri tunicam $<$ polygono in circulo: circulum; id quod cum theoremate 13 et 1. libri de sphaera et cylindro discrepat.

Eodem plane modo instituitur argumentatio, si circulus major fuerit.

Alterius generis exemplum sit theorema XXIII. libri de conoidibus et spharoidibus, quod ita sese habet: segmentum quodque barabolicum, quod per planum in axi perpendiculare abscinditur, sesquialtero majus est, quam conus ejusdem cum segmento baseos atque axeos.

Sit conus Z sesquialtero major, quam conus, cujus circulus basi et cujus axis segmenti axi aequalis est. Posito Z non esse aequalem conoidi, aut major erit aut minor. Si Z major fuerit, conoidi solidum ex cylindris ejusdem altitudinis constans, inscribatur, alterum vero circumscribatur; ita ut sit:

Solidum externum — interno < conoidi — Z id, quod secundum theoremata superius explicata fieri potest, unde, cum sit

Conoide < externo solido,

eo potius erit

Conoide — interno solido < conoidi — Z

quam ob causam internum solidum > Z.

Jam circa conoide ejusdem axeos et baseos construatur cylindrus, nomine K, et divisus per plana parallela in n cylindros aequales, quorum quisque = C est, ita ut sit K = n C, solidum internum sit = k, et sint in illo n—1, cylindri, diversae omnes quantitatis, quorum maximus c sit et caeteri c′ c″ c‴ etc. Est igitur

C : c = segmenti radius : radium cylindri c

C : c′ = segmenti radius : radium cylindri c′. etc.

(n — 1) C : K = (n — 1) segmenti radii : summam radiorum cylind. (c, c′, c″ etc.)

Radii c c′ c″ etc. pares habent differentias, et differentia minimo radio est aequalis, ergo (de conoid. et sph. I.):

(n — 1) radii segmenti > 2 summa radiorum cyl. c, c′, c″ etc., igitur (n — 1) C > 2 K, et quia K = 2 Z, Z > K q. e. a.

Eodem plane modo fit argumentatio, si Z minor fuerit.

Haec tria diversorum methodi per explosum, excessum atque defectum generum exempla ad ab-

surdum reducuntur, unde effectum est, ut ipsa haec methodus ad absurdum, praecipue vocaretur. Idem in eo, quod nunc sequitur, hujus methodi genere evenit, cujus ab Archimede in theoremate XXIV. libri de quadratura parabolae, exhibetur unum exemplum:

Segmentum quodque parabolicum aequale est $\frac{4}{3}$ triangulo, cui cum segmento eadem est et basis et altitudo: Ponatur segmentum parabolicum $= G$, triangulum $= g$ esse, erit $G = g$. Posito vero G non esse aequale g, G aut majus aut minor erit.

Sit 1. $G < g$, fiat $\frac{3}{4}\, g = F$, $\frac{1}{4}\, F = H$, $\frac{1}{4}\, H = L$ etc. donec ultima area minus fuerit excessu trianguli g ultra segmentum ac sit I parva haec area, erit

$$F + L + H \ldots\ldots + I + \tfrac{1}{3}\, I = g$$

ergo $$F + L + H \ldots\ldots + I + \tfrac{1}{3}\, I > G$$

id quod cum theoremate XXII. pugnat.

Paullo aliter demonstratur G majus esse non posse, quam g.

§. 4.

Praeter haec alia methodi per explosum, excessum atque defectum genera apud Graecos occurrunt nulla, indeque ab Archimede ad Lucam Valerium usque, huic doctrinae novi nihil additum est. Attamen jam apud veteres vestigia notionis invenio cujusdam, quae ab illa methodo sejungi non potest, notionis dico „infiniti".

Etenim non poterat non fieri, quin Graeci in iis, quas investigabant variis ac diversis rebus, notionis illius signa deprehenderent. Ut unum afferam angulum contactum, asymtota etc. 1); Nihilo tamen secius in veterum operibus, quae supersunt, notionis hujus usus ipse invenitur nullus, usus tamen vestigia quaedam ex Pappi loco suspicari poteris 2), ubi dicit, sphaeram inter omnia ejusdem superficiei solida volumen habere maximum. Quod ut ostendat primo solida planis conclusa consideranda esse dicit 3), et a quinque solidis Euclideis 4) exordiens, totam hanc inquisitionem ita claudit, ut, quod inter haec solidum volumen habere maximum, id plurima etiam habere plana, pronutiet, etsi ipse promissam demonstrationem non instituat 5).

De Antiphontis quadratura non ita accurata nobis notitia est, ut certo suspicari queas, num ad

---

1) Wallisii opera Oxoniae 1699. tom. II. de angulo contactus et semicirculo disquisitio geometria. — Pfleiderers Scholien zum III. und IV. Buche der Elemente. Mit Zusätzen von Hauber. Stuttgart, 1827. Scholium ad prop 16. III. Pappi mathematicae collectiones. Lib. II. 42. Lib. VI. 30. 31. 32.

2) Pappi l. c. V. post prop. 15.

3) Pappi l. c. prop. 18 — 57.

4) ib. l. prop. 57.

5) Kästners Geschichte der Mathematik Tom. II. pag. 90.

infiniti notionem, quam potius ad eam, quae vulgo creditur, methodum referri debeat 1).

Et si quis Aristarchum Samium infiniti notione usum esse putet, is magis eam imaginis Astronomicae, quam argumenti instar, adhibuisse sciat 2).

---

1) Aristotelis Physica lib. I. cap. 2. — Eutocii commentarius de Archimedis dimensione circuli. — Aristotelis loca mathematica, ex universis ipsius operibus collecta et explicata. Auct. I. Blancano. Bonon. 1615. §. 67—70.

2) Archimedes de arenario in: Archimedes vorhandene Werke übersetzt von Nizze. Strahlsundt 1824. §. 1.

Sectio II.

A Methodo per explosum, excessum atque defectum, theoremata dirivantur generaliora, atque de prima infiniti applicatione agitur.

§. 1.

Erat geometris ad haec usque tempora nil nisi methodus in promptu, quam adhibebant ad demonstranda ea, quae prius inventa erant de dimensione vel de rationibus curvarum linearum; curvorum spatiorum et solidorum curvis superficiebus inclusorum, eorumque superficierum. Doctrinam hanc in formam generaliorem redegisse eamque argumentis firmasse altioribus, laus est Lucae Valerii 1), qui theoremata ad primum doctrinae

1) Lucae Valerii de centro gravitatis solidorum libri III. Romae 1604. — De centro gravitatis solidorum lib. III. L. Valerii, in hac secunda editione servata ad unguem Auctoris mente, multae correctiones. Bonn. 1661. — Archimedes 2 Bücher über Kugel und Cylinder, elen-

illius genus pertinentia, ampliori sensu accipiens, nova inde haec duo theoremata constituit:

Si duae magnitudines una majores vel minores prima et tertia, minori excessu vel defectu quantacunque magnitudine proposita ejusdem generis cum illa, ad quam refertur, eundem proportionem habuerint, major vel minor prima ad secundam, et una major vel minor tertia ad quartam, erit ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam 2). Si major vel minor prima ad una majorem vel minorem secunda, minori utriusque excessu vel defectu quantacumque magnitudine proposita, fuerit ut tertia ad quartam; erit ut prima ad secundam ita tertia ad quartam 2).

Contigit huic, qui Galileo 3) alter est Archi-

---

dessen Kreismessung übers. und mit Anmerkungen und Sätzen aus L. Valerius, Tacquet und Torricelli begleitet von C. F. Hauber. Tübing. 1798. p. 109—134. — Kästners Geschichte der Mathematik tom. 4. pag. 30. — Montucla histoire des Mathématiques. Paris VII. 2 ed. tom. II. — Pfleiderer Kepleri methodus solida quaedam sua dimetiendi, illustrata et cum methodis geometrarum posteriorum comparata. Diss. Tüb. 1795. ad not. 24.

1) L. Valerii l. c. lib. II. prop. I.

2) L. Valerii l. c. lib. II. prop. II.

3) Discorsi intorno a due nuove science, attenenti alla mecanica a i movimenti locali. Dial. I. Leidae 1638.

medes, ut detecta generaliori sua doctrina, ea etiam, quae sunt de centro gravitatis, sphaerae, sphaeroidis, conoidis parabolici et hyperbolici theoremata, demonstraret et id quidem, ut et alibi omnia, breviter eleganterque. Quod si per se multum habet admirationis, accedit, quod ille procul dubio inter omnes geometras extitit primus, qui implicatas methodos in generaliora theoremata concopulaverit. Summum, inde quod ei redundabat, commodum spectanti, licet conjecturam facere, eundem fuisse, qui primum ad recentiores illas in stereometricis inquisitiones impulsum dederit, quibus geometrae ad Leibnitzii et Newtonii usque tempora dediti erant, et eundem fuisse, qui ad fignras ex infinite multis, infinite parvis particulis componendas atque hinc ad studia prolixae methodi abbrevianda dux praeiverint 1).

§. 2.

Ad Keplerum venio, virum, per deos, si quis alius, immortalem, qui mira quadam ingenii felicitate, in quamcunque scientiarum partem oculum converterit, novas, ut ita dicam, terras ubique detexit, neque tamen ille in iis, quae posuerat rerum fundamentis morabatur, sed mox relicta festinantius ea, aliis perficienda tradidit. Hic tanquam

1) Klügels mathematisches Wörterbuch. Artikel Cavaleris Methode des Untheilbaren.

animi recreandi causa 1) problemata quaedam stereometria tractans, analyseos infinitae fundamenta jecit 2).

Jam quidem anno 1544 Stifelius, circulum polygon vocaverat laterum infinite multorum, adjecta thesi, ambitum ejus nullo numero posse exprimi, neque ei ullam rationem sive rationalem sive irrationalem ad diametrum intercedere, eamque ob causam fieri non posse, ut circulus quadraretur 3). Sed hic ille consistens, non ulterius progressus est, id, quod ei in logarithmis 4) etiam evenit, quorum inventioni non minus prope accesserat.

Keplerus in Stereometrîae doliorum 5) theoremate secundo docet, circuli circumferentiam partes

---

1) Kepleri epistolae. edidit. Hansch. Lips. 1716. p. XXV. ad not. 239. 550.

2) Laplace exposition du systeme du monde. edit. 4 Paris 1814. p. 406. — Montucla histoire des mathematique tom. II. ed. 1 pag. 17.

3) Arithmetica integra, Authore Mich. Stifelio. Norimb. 1544. pag. 224.

4) Kaestner l. c. Bd. I. p. 119. et 128.

5) Joh. Kepleri noua stereometria doliorum vinariorum, inprimis austriaci, figurae omnium aptissimae, et usus in eo virgae cubicae compendiosissimus et plane singularis. Accessit stereometriae Archimedeae supplementum. Lincii 1615. — Joh. Keplers Auszug aus der uralten Messkunst Archimedis und derselben neulich in Latein

habere totitem, quot puncta, puta infinitas. Extendatur jam circulus in rectam lineam, in qua erigatur perpendicularis, quae sit aequalis semidiametro circuli, et completo triangulo, hoc circulum aequabit. Idem enim ex infinite multis triangulis constat, quia basis ex infinite multis constat basibus, quarum quaeque aequat basin trianguli in circulo, cujus vertex in centro circuli. Haec autem triangula illis in circulo numero sunt paria, eandem habent et altitudinem et bases, ergo circulus triangulum aequat.

Similiter theoremate II. demonstrat, corpus cylindri esse ad corpus sphaerae, quam stringat, in proportione sesquialtera, quod duobus ostendit modis. Primum considerat Corpus sphaerae in se continens infinitos conos, verticibus in centro sphaerae coeuntes, basibus infinite parvis, tanquam punctis in superficie. Deinde sphaerae superficie in circulum extensa, cujus diameter sit dupla diametri sphaerae, super hanc constituit conum, cujus attitudo aequalis semidiametro sphaerae, et assumtis theorematis 10. 11. 14. XII. Elem. obtinet,

---

ausgegangenen Ergänzungen betreffend. Linae 1616. — Pfleiderer, Kepleri methodus solida quaedam sua dimetiendi illustrata et cum methodis geometrarum posteriorum comparata. Tüb. 1795. — Kaestner l. c. III. pag. 313—331. — Montucla l. c. ed. 2 tom. II. p. 29—31.

id, de quo sermo est, theorema. In altera theorematis demonstratione, cylindri basin, quemadmodum in theoremate secundo, in infinita triangula, secat, et constructis in eis prismatibus, quorum summa cylindrum aequat, rem simili modo peragit.

Eodem plane modo cetera theoremata demonstrat, aliter autem theorema XX. ubi aream plani lineis parallelis in infinite parva segmenta secat, quasi „linearia," ut ita aream eadem plane ratione quaerat, veluti postea per methodum indivisibilem factum est. Theoremate XVIII. orbiculos annulorum in partes secat rotundas, quasi sectores cavorum cylindrorum. Theoremate vero XX. et XVII. solida rotunda, quae ibi considerat, e cylindris, quasi tunicis vel superficiebus rotundis componit, qui singuli singula quadrilatera plana ungulae aequant.

Novis contemplandi rationibus nova solida introduxit multa Keplerus, quorum proprietates, dum sua methodo examinat, geometris vias sternit, quibus campos aperuit longe lateque patentes.

§. 3.

Bonaventura Cavalerius 1) anno 1635 publicat

1) Geometria indivisibilium continuorum nova quadam ratione promota, auctore B. Cavalerio. Bon. 1635 — Geom. indivis. cont. nova quad. rat. auct. B. Cavalerio. In hac postre-

doctrinam suam indivisibilium, in qua considerat lineas tanquam punctorum sive elementorum indivisibilium linearum seriem, plana tanquam linearum (quae sunt elementa planorum) seriem.

Cavalerius plana secat infinite multis certae lineae (regulae) lineis parallelis, solida infinite multis certo plano (regulae) planis parallelis 1). Post haec fulcitur methodus theorematis his plane generalibus: sint dua plana A, B data, in quorum regulis perpendicula inter sese aequalia construantur, et parallelae ducantur; et sit:

regula A: regulam B = parallela a: parallelam b, quae vero aeque distet a regula B, quam a a regula A, erit

A: B = regula A: regulam B. 2)

Pariter sint duo solida A, B data, in quorum regulis stent perpendicula aeque alta, cum regulis ducantur plana parallela, nec non

regula A : regulam B = planum a cum regula A parallelum : planum b cum regula B parallelum,

---

ma editione ab erroribus expurgata ad illust. D. D. Martinum Ursinum Pennae. Bon. 1653. — Pfleiderer Kepl. meth. etc. pag. 25 seq. — Carnot l. c. p. 36 — 42 et p. 99. — Klügel's l. c. Artikel Methode des Untheilbaren — Mac-Laurin l. c. intud. p. I. II.

1) Lib. I. def. A. pag. 1. 2 ed.

2) Lib. II. prop. 4. pag. 115.

quae vero aeque distet a regula, quam a regula A, erit:

A : B = regula A : regulam B.

Ex duobus his theorematis efficitur, si regulae datam habeant rationem, plana etiam et solida datas habere rationes. Ad comparanda solida et plana, theorema adhibetur hoc:

> Exposito parallelogrammo quocunque in eoque ducta diametro, omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cujusvis triangulorum per dictam diametrum constitutorum, erunt in ratione tripla, uno laterum parallelogrammi communi regula existente 1).

Et tanquam methodi nervum adjicit;

> Liquet ex hoc, quod ut inveniamus, quam rationem habeant inter se duae figurae planae vel solidae, sufficiet nobis reperire, quam in figuris planis inter se rationem habeant, earundem omnia plura juxta quamvis regulam assumpta, quod novae hujus meae geometriae veluti maximum jaceo fundamentum 2).

Ad comparanda inter se solida et plana vel ad quaerendam aream eorum, elementa, sive indivi-

1) Lib. II. prop. 24.
2) Lib. II. prop. 3. pag. 115.

sibilia, summat. Haec autem summandi ratio in eo, quod primum edidit, opere, in his duntaxat adhibetur quadratis, quorum valores a serie infinita dependent, et quorum radices in progressione arithmetica versantur. In alio contra postea publicato libro 1), rationem quaerit, quam cuborum summae omnium earum, quae parallele sitae rectangulum complent, linearum ad summam cuborum omnium parallelarum in eo, quod eas bisecat, triangulo, et quam summae biquadratorum earum habent.

Cavalerius, sua adhibita methodo, solida Euclidea, Archimedea et Kepleriana examinat, et generales figurarum proprietates ostendit, ut: „omnis figurae planae similes sunt inter se in dupla ratione linearum, sive laterum homologorum earumdem 2)," „omnia similia solida sunt in tripla ratione linearum vel laterum homologorum, quae sunt in eorundem homologis figuris 3)."

Haec duo theoremata, ut plane generaliter demonstret, multus est mirum in modum, ut solet, et paene anxie accuratus.

---

1) Exercitationes geometriae sex I. de priori methodo indivisibilium II. de posteriori III. in P. Guldin dicta indivisibilia oppugnantem IV. de usu eorum indivisibilium in potestatibus cossicis V du usu superficiebus gravibus VI. de quibusdam propositionibus miscellis auctore F. B. Cavalerio. Bon. 1647.

2) Lib. II. prop. 15. Geom. ind. pag. 127. ed. 2.

3) Lib. II. prop. 17. pag. 133.

Etsi methodus, qua in malo, citrio, oliva dimetienda usus est, a Kepleriana longe recedat, nihil tamen in quaerenda solidorum Keplerianorum area felicior erat Keplero ipso, quum tantummodo solidorum aream invenit eorum, quae Keplero jam nota erant.

Quod Cavalerius methodum suam in solida Kepleriana applicavit, id illi rixas movit cum P. Guldino 1), qui ei culpae dedit, ansam et occasionem methodi suae Keplero, nominatim e theoremate II. III. IV., ut ipsemet inueret 2), surripuisse. Qua re motus Cavalerius in altero suo scripto diversa omnino esse suae et Keplerianae methodi fundamenta, accusatiori regerit, nec methodum suam e Keplero esse depromtam, neque aliud se, quam suae methodi rationem in solida Kepleriana applicasse: „Keplerus enim, pergit, ex minutissimis corporibus quodammodo majora componit, iisque utitur tanquam congruentibus, quemadmodum et ipse Guldinus asserit in sectione tertia, ubi ipse tantum dico plana esse, ut aggregata omnium aequi distantium, et corpora ut aggregata omnium planarum pariter aequidistantium 3).“

---

1) De centro gravitatis brium specierum quantitates continuae lib. IV. auctore P. Guldino. Viennae, 1635 — 1642. Montucla l. c. tom II. pag. 32 — 36.

2) Geometr. indiv. in praefatione.

3) Exert. geom. pag. 180. 192. 193.

Se jam anni 1626 initio methodum excogitatam, et anno 1629 librum ipsum finitum habuisse, ejusque rei affirmandae gratia testes citat 1).

Quanquam igitur apparet, Cavalerius methodum illam suo omnino marte invenisse, tamen negari non potest, quam ante cohaereat cum ea, qua Keplerus in theorem. XX. usus est, methodo, id quod Guldinus minime respexit. Ceterum Cavalerius ipse contra Guldinum monet, etsi concederet aliquid luminis ex stereometria Kepleri methodo suae indivisibilium suppeditatum fuisse, (quod ipse minime negat), hanc tamen summam totius artificii methodi nequaquam esse 2).

§. 4.

Cavalerius praeceptore usus est Galileo 3), qui discipuli methodum ipse ad demonstranda quaedam theoremata passim adhibet 4). Frisius, Galileum e Kepleri stereometria indivisibilium notionem hausisse tradidit, eumque in animo quidem habuisse de ea re tractatum integrum conscribere, sed quamvis

---

1) Ibid. pag. 182. seq.

2) Cavalerius l. c. pag. 193. seq.

3) Frisi Elogi di Galileo Galilei di Bonav. Cavaleri. Milam, 1778.

4) Galilei Discorsi e dimonstrazioni mathematize intorno a due nuone scienze, attenenti alla mecanica et i movimenti locali. Leidae. MDCXXXVII. Dis. I. Dis. III. prop. I.

iteratis excitatus fuerit. Cavalerii literis, propositum haud effecisse 1).

Fermatius methodo hac usus est, calculo tamen adhibito, ad abbrevianda theoremata, quae circumscriptione et inscriptione demonstrantur 2). Quam in epistola Septembre 22. 1636 ad Robervallium data, jam septem circiter abhinc annis cum amico communicasse scribit, et praeter solida ad problemata de maximis et minimis, centrorum gravitatis, tangentium ac rectificationis curvarum aliaque sub methodi maximorum et minimovum nomine, tum ab initio statim, tum postea extendit 3).

Robervallius in alia ad Torricellum epistola contendit, se integro quinqennio ante Cavalerianae geometriae publicationem, indivisibilium doctrina usum esse, sed ipsum plana componere e rectan-

1) Frisi Elogi di Galileo pag. 77. seq. Elog. di Cavaleri pag. 18. seq. — Jagemann's Geschichte des Lebens und der Schriften des Galileo Galilei. Weimar. 1783. pag. 137.

2) Fermatius de aequationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilineorum tnter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricae in quadrantis infinitis parabolis et hyperbolis usus. (Fèrmatii opera mathematica. Tolosae, 1679. pag. 44. seq.)

3) Fermatii opera pag. 136. — L'influence de Fermat sur son siecle relativement aux progres de la haute geometrie et du calcul par Genty. 1784. pag. 52.

gulis infinite parvis, solida vero ex ejusmodi prismatis 1).

Cartesius in epistola ad Mersennum circa annum 1638 scripta, quo tempore Cavalerii geometriam nondum viderat 2), cycloidis aream explicaturus, concludit: rectangula duo mixtilinea aequalia esse, si rectas eorum lineas, eodem sensu in utroque descriptas, aequales esse demostretur 3).

Stephanus de Angelis, Cavalerii discipulus, ejusdemque cum illo religiosae societatis, praeceptoris methodo usus est ad aream et centrum gravitatis sectionum conicarum variorum ordinum inveniendam, eamque applicavit in solida varia, quae rotatione variorum segmentorum similiter ac Kepleriana solida oriuntur, et ad lineas spirales superiorum ordinum 4).

---

1) Divers ouvrages de mathematique et de phys, par Mss. de l'Academie roy. des sicences. Paris, 1693. pag. 285. — Montucla l. c. tom II. pag. 43.

2) Des-Cartes Epistolae Amsl. 1683. Ep. 95. pars. III. pag. 343.

3) Ibid. epist. 58. pag 228.

4) Problemata geometria sexaginta circa conos sphaeras. Ven., 1858. — De superficie ungulae et de quartis lileorum parabolicorum cycloidolium 1661. — De infintis parabolis, de infinitis solidis 1659. — Miscellaneum hyperbolicum et parabolicum, in quo praecipue agitur de centro gravitatis hyperbolae, partium ejusdem, atque nonnullorum solidorum, de quibus nunquam geometria

Qui eundem cum Cavalerio praeceptorem habebat Torricellius, multum laudis tulit in amplificanda indivisibilium methodo. Is introduxit indivisibilia 1) talia, qualibus Keplerus in theorematis XVII. XVIII. XX. usus erat, quae quum non videtur ante oculos habuisse, ipsum ea invenisse credideris: „Methodus nostra," ait, „quam usurpaturi sumus, procedet per indivisibilia curva, sine aliorum exemplo. Considerabimus enim omnes cylindricas superficies in nostro solido descriptibiles. Cujus rei cum nullum Cavalerius ipse tradiderit in sua geometria exemplum" — excepto prop. 4. 5. 6. 9. Libu. in Caval. geom. — „existimavimus nostram arguendi rationem exemplis aliquot corrobarandam 2)."

Haec et alia hujus generis, in primis autem stereometriae Keplerianae ignoratio, procul dubio in causa sunt, quod Hermannus in sua de ortu et progressu geometriae oratione 3), et post eum alii

---

locuta est. Parabola noviter quadratur. dupliciter. Ducutur infinitarum parobolarum tangentes ect. 1659. — Miscellaneum geometricum in quartuor partes divisum 1660 — De infinitorum cochlearum mensuris 1661 — Accesiones ad Stereometriam et Mecanicam 1662.

1) De dimensione parabolae solidique hyperbolici acuti problemata duo (Torricelli opera omnia. Florent. 1644.)

2) Ib. pag. 94.

3) Sermones in secundo soleni Acad. sc. imper. conventa 1726 recitati. Petrop. pag. 39.

Keplerum silentio omiserint, non huic, sed Torricellio soli indivisibilium horum introductionem vindicantes. Torricellium indivisibilium ope aream solidi invenit, quod gignitur, si arcus hyperbolicus in infinitum versus unum latus extensus, circa asymtotam suam rotetur, id solidum vocat hyperbolicum acutum 1). Usus est etiam hac methodo ad inveniendam cycloidis aream, quo obtinuit, binas parallelas in spatio dimidiae cycloidis, inde ab initio usque ad verticem et chordam, aequales esse binis parallelis aequalibus correspondentibus in semicirculo ad verticem.

§. 5.

Florente methodo indivisibilium, veterum methodi excoluntur et novae creantur. Tacquet 2) et Renaldinus 3) e primo Euclidis et Archimedis theorematum genere, eadem, quae Lucas Valerius, theoremata abstraxerunt, mutatis tantummodo verbis. Sic utrique, in primis vero priori, contigit, ut Graecorum theoremata abbreviaret, quae ad inveniendam solidorum aream, sectionibus conicis circa quamlibet diametrum rotatis, ad quatraturam

1) l. c.

2) Andreae Tacquet opera mathematica. Demonstrata et propugnata a S. Laureniio. Lovarici, 1668.

3) Caroli Renaldini de resulutione et compositione mathematica lib. II. Patavi, 1668.

sectionum conicarum ipsam, ad examinandas annulorum variorum proprietates, adhibebat 1). Praeterea Tacquet novum huic methodo nomen imposuit, methodum exhaustionis vocans, quam ita explicat: „magnitudo quaevis per inscriptas sibi magnitudines exhauriri dicitur, cum inscriptae magnitudines ab ipsa deficere tandem possunt magnitudine data minori, hoc est, quavis parva. Similiter magnitudo quaevis per circumscriptas sibi magnitudines exhauritur, cum haec ipsum denique superare excessu minori ducta possunt 2).“

Gregorius a St. Vincentio 3) mathesin locupletavit non paucis theorematis, quorum demonstrationem exhaustionis methodo adhibita, saepius instituit, praeterea novam methodum introduxit ab ipso constructionem ex ductu nominatam, cui qui-

1) Tacquet cylindrorum et annulorium lib. II. item de circulorum volutione per planum diss Amstel. 1641. — Elementa geometriae planae et solidae, quibus accesserunt selecta ex Archimede theoremata auctore A. Tacquet. Amstel. 1683. — Archimedes über Kugel und Cylinder von Hauber. pag. 134. — Kaestners l. c. pars II. pag. 256. seq. — Montucla l. c. pag. 84. tom. II.

2) Tacquet Cyl. et An. Def. ad lib. I. II. 28.

3) P. Gregoriis a Sto Vincentio opus geometricum quadraturae circuli et sectionem coni, decem libris comprehensum Antverpiae 1647. — Kaestner. l. c. III. pag. 221. seq. — Monteula l. c. tom. II. pag. 29.

dem aliaqua cum methodo indivisibilium 1) similitas intercedit, usu tamen ab illa inprimis recedit. Hujus methodi naturam ex iis fere, quae sequuntur definitionibus, perspexeris:

I. Ductum plani in planum voco corporis cujusque efformationem, ex duabus superficiebus, eandem habentibus ant aequale basin ortam.

II. Ductum plani in se voco, cum ductu superficies planae in aliam sibi aequalem ac similem similiterque constitutam secundum omnes partes ducitur.

III. Ductum plani in se ipsum subalterne, voco, cum plana superficies ducitur aliam aequalem sibi asimilita non similiter tamen institutam, sed inverse 2).

Cavalerii de seriebus inquisitiones, quibus et ipse in methode utitur sua, amplificat. Atque nunc in fine paragraphi hujus de studiis duum virorum loquar, quorum alter methodum invenit novam, alter vocabuli usum frequentiorem, quam ullus antea, reddidit. Qui posterior de Beaume libri est scriptor, in quo limites aequationum primi, secundi et tertii gradus determinat 3). Caravaggio alter, novae au-

---

1) Cavalerii exercit. II. pag. 536. — Aynscomii expositio ac deductio geometrica quadraturarum circuli Gregorii a St. Vincentii. Antv. 1656. pag. 128.

2) Gregorii op. geomet. Lib. VIII. pag. 704.

3) Geometria a R. des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum Notis F. de Beaume, gallice con-

ctor methodi ad inveniendam de maximo et minimo theoriam inservientis. Exemplo sit theorema secundum:

Inveniatur parallelepipedum maximum, quod ex alterius sectionis quadrato efficietur: Linea data sit B, ejusque sectio A, $(B - A)\, A^2$ maximum sit.

Duabus hisce sectionibus B alias sectiones addit, ita, ut sit altera $A + \Delta A$, altera $B - A - \Delta A$; erit parallepipedum

$$(B - A - \Delta A)\,(A + \Delta A)^2$$

ejus ea, quae prius subtracta est, et residuo $= 0$ posito, perque ΔA diviso, habebis:

$$2A.B - 3A^2 + (B - 3A)\,\Delta A - \Delta A^2 = 0$$

Si $\Delta A = 0$, $2AB - 3A^2 = 0$ est et dividendo per A

$$2B - 3A = 0, \text{ igitur } A = \tfrac{2}{3}B. \;1)$$

Similis methodi, generalioribus tamen theorematis, Fermatius auctor est 2).

§. 6.

DEFINITIONES.

I. Si fuerit variabilis quantitas data quantitate minor, ita tamen, ut major fieri possit, qualibet data quantitate, quae minor sit priori data,

---

scriptis, in latinam linguam versa et commentariis illustrata, opera atqua Studio F. a Schooten. Amstel. 1669. pars II. pag. 121 — 152.

1) Geometria applicationum deficientium figura data specie, auctore Petro Paulo Caravaggio. Mediolani 1659.

2) Fermatii opera pag. 63.

haec limes erit crescentis variabilis quantitatis.

II. Si fuerit variabilis major data quantitate, ita tamen, ut minor fieri possit, qualibet data quantitate, quae major sit priori data, haec limes erit decrescentis variabilis quantitatis.

III. Si fuerit variabilis ratio major semper data ratione, ita tamen, ut major fieri possit qualibet data, quae minor sit priori data ratione, haec limes erit crescentis variabilis rationis.

IV. Si fuerit variabilis ratio major semper data ratione, ita tamen, ut minor fieri possit qualibet data, quae major sit priori data ratione, haec prior ratio data limes nuncupatur decrescentis variabilis rationis.

Carollarium I. Si quantitas variabilis fuerit modo major, modo minor data quantitate, ita tamen, ut variabilis quantitas datae magis accedat qualibet data quantitate, quae respective major aut minor sit priori data quantitate, haec limes nuncupatur et crescentis et decrescentis variabilis quantitatis.

Sit e. g.: $1 - p + p^2 + p^3 \ldots\ldots\ldots \mp p^{n-1} \pm p^n$ et $p < 1$, summa hujus progressionis, erit $\frac{1}{1+p} \pm \frac{p^n}{1+p}$ prout $n \begin{Bmatrix} \text{par} \\ \text{impar} \end{Bmatrix}$ fuerit $\frac{p^n}{1+p}$ minor aut major fieri potest qualibet data

quantitate mirori aut majori, quam $\frac{1}{1+p}$, igitur $\frac{1}{1+p}$ limes erit et crescentis et decrescentis quantitatis.

Carollarium II. Sic variabilis ratio modo major fuerit, modo minor data ratione, ita tamen, ut variabilis ratio datae huic rationi magis accedat, qualibet data ratione, quae respective major aut minor sit priori data ratione, prior data ratio limes nuncupatur et crescentis et decrescentis rationis.

Propositio I.

Si datae fuerint plures quantitates variabiles, quarum unaquaeque $\left\{\begin{matrix}\text{major}\\ \text{minor}\end{matrix}\right\}$ fieri possit qualibet data quantitate, earum etiam summa respective $\left\{\begin{matrix}\text{major}\\ \text{minor}\end{matrix}\right\}$ fieri potest qualibet data quantitate.

Argumentatio difficultate nulla laborat.

Corollarium I. Hinc sequitur, $V.\ V_1.\ V_2.$ etc. $\left\{\begin{matrix}\text{major-}\\ \text{minor-}\end{matrix}\right\}$ es fieri posse, quam M.

Corollarium II. Si $V = V_1 = V_2 =$ etc. sequitur V^n $\left\{\begin{matrix}\text{major-}\\ \text{minor-}\end{matrix}\right\}$em quam M fieri posse.

Propositio II.

Si datae fuerint quantitates duae variabiles, quarum unaquoque $\left\{\begin{matrix}\text{major}\\ \text{minor}\end{matrix}\right\}$ fieri possit qualibet

data quantitate, differentia etiam earum $\left\{ \begin{matrix} \text{major} \\ \text{minor} \end{matrix} \right\}$ fieri poterit qualibet data quantitate.

Argumentatio facillima.

Corollarium I. Potest etiam $V - V_1 - V_2 -$ etc. $\left\{ \begin{matrix} \text{major} \\ \text{minor} \end{matrix} \right\}$ fieri quam M.

Corollarium II. Inde sequitur, $\frac{V>}{V_1<}$ M et $\frac{V>}{m<}$ M fieri posse.

P r o p o s i t i o III.

Si duae quantitates datae unius ejusdemque variabilis limites fuerint, ipsae erunt inter aequales sese

Breviter. Si G limes v et g limes v fuerit, erit $G = g$.

Sit enim G non aequalis g, sed sit $G + \Delta G = g$, ergo $G = g - \Delta G$, tum, si v semper minor esset, quam G, $v < g - \Delta G$, foret, ergo $v + \Delta G < g$ vel $\Delta G < g - v$ vel $g - v > \Delta G$; ergo $g - v$ semper major erit, quam ΔG, e contrario vero $g - v$ (ex hyp.) minor fieri potest qualibet quantitate data; id vero non convenit.

Neque magis v quantitatibus G et g interjacere poterit, ita enim $G - v$ et $g - v$ saltem de $\frac{1}{2} \Delta G$ differrent.

Utcunque igitur statueris, v ad utramque quantitatem G et g non proprius accedere possit qualibet quantitate data, id quod definitionibus 1 et 2 repugnat. Necessario igitur $G = g$ erit.

P r o p o s i t i o IV.

Variabilium duarum limes, quarum prior crescat, posterior decrescat, limiti duarum variabilium aequalis est, quarum prior decrescit, posterior crescit, illa aut aequalis aut major, haec aut aequalis aut minor est duabus illis variabilibus.

Nempe. Si G limes fuerit $\left\{\begin{matrix}\text{crescentis } V\\ \text{decrescentis } V'\end{matrix}\right\}$ g vero limes $\left\{\begin{matrix}\text{decrescentis } v\\ \text{crescentis } v'\end{matrix}\right\}$ et si $v \underset{>}{=} V$, $v' \underset{<}{=} V'$, erit $G = g$.

Etenim si non esset $G = g$, necessario erit aut $g < G$ aut $g > G$.

1) Si $g > G$ et $g = G + \Delta G$ praeterea $V' : V < G + \Delta G : G$ erit quia $v' = < V'$ (ex hyp.) $v' : V < g : G$ quod consentaneum non est.

2) Si porro $g < G$ et $g = G - \Delta g$ praeterea
$V' : V < G : G - \Delta g$ erit, quia $v >= V$, $v' =< V'$ (ex hyp.)
$V' : V < G : g$. Deinde, quia $V' > G$ et $v < g$ (ex hyp.)
ergo $V' : v > G : g$, id quod non est consentaneum.

Constat igitur, g neque majorem neque minorem fieri posse, quam G, ergo v necessario erit $G = g$.

Propositio V.

Si data quantitas limes fuerit variabilis quantitatis, aliaque data limes alius variabilis, summa utriusque datae limes erit summae utriusque variabilis

Nempe. Si G limes fuerit variabilis V

$$\begin{array}{llll} \text{et } g & — & — & — \quad v \\ \hline G+g & — & — & — \quad V+v. \end{array}$$

I. Sit $V < G$ et $v < g$, (ex hyp.) $V > m$ et $v > n$ fieri potest, si $m < G$ et $n < g$, hinc etiam $V + v > m + n$ fieri poterit, et est $m + n < G + g$, porro m et n qualibet sunt quantites, ergo $m + n$ quoque quaelibet quantitatas est, igitur $G + g$ limes erit ejus $V + v$.

II. Sit $V > G$ et $v > g$, argumentatio eadem erit.

III. Si $V < G$ et $v > g$ fuerit, ita, ut $V + \Delta V = G$ et $v - \Delta v = g$. Quo magis igirur v ad g accedit, eo minor fit Δv, et Δv minor fieri potest qualibet data quantitate, fiat igitur $\Delta v < \Delta V$, ita ut $\Delta V - \Delta v > 0$.

Cum igittr $V+v+\Delta V-\Delta v=G+g$. (ex const.)

$$\begin{array}{ll} \text{et} & \Delta V-\Delta v > 0. \\ \hline \text{inde est} & V+v \quad < G+g. \end{array}$$

Est vero etiam $V+v>G+g$, nam quo magis V ad G accedit, eo minor fit ΔV, et veluti supra $\Delta V<\Delta v$ fieri potest, ita etiam $\Delta V-\Delta v<o$ erit. Cum igitur

$$\begin{array}{ll} & V+v+\Delta V-\Delta v = G+g \\ & \Delta V-\Delta v < o \\ \hline \text{est} & V+v \quad > \quad G+g. \end{array}$$

Potest igitur $\left\{\begin{matrix} V>m \\ v<n \end{matrix}\right\}$ fieri, si $\left\{\begin{matrix} m<G \\ n>g \end{matrix}\right\}$ fuerit (ex hyp.), hoc sit, sitque porro $V-\Delta V^1 = m$ et $v-\Delta v^1 = n$. Eodem modo, quo supra demonstrari potest $\Delta V^1 - \Delta v^1 >$ et $<$ o esse, nec non $\Delta V^1 - \Delta v^1 <$ et $>$ o esse, ergo

$$\begin{array}{l} V+v-\Delta V^1+\Delta v^1 = m+n \\ -\Delta v^1+\Delta V^1 < \text{et} > o \\ \hline V+v \; 7 \text{ et } \angle \; m+n. \end{array}$$

Itidem ostenditur $m+n \angle 7 G+g$ esse, sunt vero m et n quaelibet quantitates, respective minores vel majores, quam G et g, ergo etiam $m+n$ quaelibet quantitas est, quae $\left\{\begin{matrix} \text{minor} \\ \text{major} \end{matrix}\right\}$ G et g; ostensum vero, $V+v \; 7 \; \angle \; m+n$ fieri posse, ergo $G+g$ limes erit ejus $V+v$ (Coroll. I. def.) q. e. d.

Corollarium I. Cum expositum sit, $G+g$ limitem esse ejus $V+v$, etiam, si G^1 g^1 G^2 g^2 etc., respective limites fuerint ejus V^1 v^1 V^2 v^2 etc., item repetenda hac propositione demonstrari potest, etiam $G+g+G^1+g^1+G^2+g^2+$etc. limitem esse ejus $V+v+V^1+v^1+V^2+v^2+$etc.

Corollarium II. Sequitur inde, G. g limitem esse ejus V. v et G. g. G_1. g_1. G_2. g_2. etc. limitem esse ejus V. v. V_1. v_1. V_2. v_2. etc. 1)

Corollarium III. Si fuerit

$G=g=G^1=g^1=G^2=g^2$ etc. et

$V=v=V^1=v^1=V^2=v^2$ etc. sequitur

etiam G^m limitem esse ejus V^m.

---

1) Corollarium hocce sine prop. VII. demonstrari potest modo sequente:

I. Sint G et g limites variabilium decrescentium quantitatum, ita ut $V=G+\Delta G$

$v=g+\Delta g$

igitur $Vv=Gg+g(\Delta G)+G(\Delta g)+(\Delta G)\times(\Delta g)$.

Est autem lim. $(g:g+\Delta g)=1:1$

ergo lim. $[g(\Delta G):g(\Delta G)+(\Delta G)(\Delta g)]=1:1$

et lim. $[Gg+G(\Delta g)+g(\Delta G):Gg+G\times(\Delta g)+g(\Delta G+(\Delta G)\Delta g)]=1:1$

Cum $\begin{Bmatrix}V=G+\Delta G\\ v=g+\Delta g\end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix}V\\ v\end{Bmatrix}$ minor fieri possit quaelibet data quantitate, quae major, quam $\begin{Bmatrix}G\\ g\end{Bmatrix}$ fuerit, etiam $\begin{Bmatrix}\Delta G\\ \Delta g\end{Bmatrix}$ minor fieri potest qualibet data quantitate, ergo $\begin{Bmatrix}G(\Delta g)\\ g(\Delta G)\end{Bmatrix}$ minor fieri potest, qualibet data quantitate, et hinc etiam $G(\Delta G)+g(\Delta G)$ minor fieri possit qualibet data quantitate, G g limes erit ejus $Gg+G(\Delta g)+g(\Delta G)$ estque Gg limes decrescentis quantitatis $Gg+G(\Delta g)+g(\Delta G)+(\Delta G)(\Delta g)$ vel ejus V v, est enim

Corollarium IV. Si G limes fuerit ejus V, etiam $G + a$ limes erit ejus $V + a$, id quod luce clarius.

Propositio VI.

Si data quantitas limes fuerit variabilis, aliaque quantitas data, quae minor sit priori, limes variabilis alterius, quae item minor sit priori, differentia datarum quantitatum limes est differentiae variabilium quantitatum.

---

lim. $[Gg : Gg + G(\Delta g) + g(\Delta G)] = 1:1$
lim. $\{Gg + G(\Delta g) + g(\Delta G) : Vv] = 1:1$
Ergo lim. $[G : g \quad : Vv] = 1:1$
ergo Gg limes est decrescentis producti Vv.

II. Si V et v crescentes fuerint quantitates, eadem uti poteris demonstratione.

III. Sit G limes decrescentis quantitatis V et g limes sit crescentis v, ita ut

$$\begin{array}{l} V = G + \Delta G \\ v = g - \Delta g \\ \hline \end{array}$$

ergo $Vv = Gg + g(\Delta G) - G(\Delta g) - (\Delta G)(\Delta g)$.
Cum lim. $[g : g - \Delta g] = 1 : 1$
ergo lim. $[g(\Delta G) : g(\Delta G) - (\Delta G)(\Delta g)] = 1:1$
et lim. $[Gg - G(\Delta g) + g(\Delta G) : Gg - G(\Delta g)$
$+ g(\Delta G) - (\Delta G)(\nabla g)] = 1 : 1$
vel lim. $Gg - G(\Delta g) + g(\Delta G) : V.v = 1 : 1$.
Quemadmodum in cas. I., ita hic etiam demonstratur, Gg limitem esse et crescentis et decrescentis quantitatis $Gg - G(\Delta g) + g(\Delta G)$,
ergo lim. $Gg : Gg - G\Delta g + g\Delta G = 1:1$
lim. $Gg - G(\Delta g) + g(\Delta G) : Vv = 1:1$
ergo lim. $Gg : Vv = 1$ 1.
igitur Gg limes est et crescentis et decrescentis producti Vv. . q. e. d.

Breviter. Sit data quantitas G limes variabilis V, et data quantitas g, limes sit variabilis v, sique $G > g$, $V > v$ fuerit, $G - g$ limes erit ejus $V - v$.

I. Si fuerit $\begin{pmatrix} V < G \\ v < g \end{pmatrix}$, ex hyp. $\begin{pmatrix} V > m \\ v > n \end{pmatrix}$ fieri poterit, si $\begin{pmatrix} m < G \\ n < g \end{pmatrix}$ sit, sique m et n quantitates quaelibet sint, est igitur $V - v < G - g$, ac $V - v > m - n$ fieri potest, et est $m - n < G - g$. Cum igitur m et n quaelibet sint quantitates, ob eandem causam etiam $m - n$ quaelibet erit quantitas igitur $G - g$ (def. 1.) limes ejus $V - v$.

II. Si fuerit $\begin{pmatrix} V > G \\ v > g \end{pmatrix}$, ex hyp. $\begin{pmatrix} V < m \\ v < n \end{pmatrix}$ fieri potest, si $\begin{pmatrix} m > G \\ n > g \end{pmatrix}$ sit. Hinc, si m et n quaelibet fuerint quantitases, $m - n$ etiam erit quaelibet quantitas, est $V - v > G - g$, et $V - v < m - n$ fieri potest, nec non $m - n < G - g$ est, $G - g$ (def. 2.) limes erit ejus $V - v$.

III. Sit 1. $\begin{pmatrix} V \angle G \\ v 7 g \end{pmatrix}$ vel 2. $\begin{pmatrix} V 7 G \\ v \angle g \end{pmatrix}$.

1) Si $\begin{pmatrix} V \angle G \\ v 7 g \end{pmatrix}$ fuerit sit $V + \Delta V = G$

$$\frac{\begin{array}{r} v - \Delta v = g \end{array}}{\text{ergo } V - v + \Delta V + \Delta v = G - g}$$

ergo $V - v \angle G - g$.

Ex hyp. $\left(\begin{smallmatrix} V \, 7 \, m \\ v \angle n \end{smallmatrix}\right)$ fieri potest, si m et n quaelibet fuerint quantitates, quae respective $\left(\begin{smallmatrix} \not< G \\ < g \end{smallmatrix}\right)$ sint, sit hoc et

$$\begin{array}{lcl} V - \Delta V' = m & & m + \Delta m = G \\ v + \Delta v' = n & \text{et} & n - \Delta n = g \end{array}$$

ergo $V - v - \Delta V' - \Delta v' = m - n$ et $m - n + \Delta m + \Delta n$
$= G - g$

ergo $V - v \; 7 \; m - n$ et $m - n \angle G - g$
Fiebat igitur $V - v \angle G - g$, fierique potest $V - v$
$> m - n$ si $m - n < G - g$

ergo G—g limes est ejus V—v (def. 1).

2) Si $\left(\begin{smallmatrix} V \, 7 \, G \\ v \angle g \end{smallmatrix}\right)$ fuerit, itidem demonstrari potest, $V - v \; 7 \; G - g$ esse, et $V - v$ minorem fieri posse, quam $m - n$, si $m - n \; 7 \; G - g$ fuerit, ergo ex def. 2. G—g limes erit ejus V—v. q. e d.

Corallarium I. Sit $V - v = V_1$ et $G - g = G_1$ et g_1 limes ejus v_1, $G_1 - g_1$ limes est ejus $V_1 - v_1$ vel $G - g - g_1$ limes est ejus $V - v - v_1$ indeque generaliter ejus $G - g - G_1 - g_1 -$ etc. limes $V - v - V_1 - v_1 -$ etc.

Corollarium II. Eodem modo $\frac{G}{g}$ limes est ejus $\frac{V}{v}$.

Corollarium III. Item G — a (a scilicet quantitatas est quaelibet data) limes ejus V—a, et

generaliter G—a—b—c etc. limes est ejus V—a —b—c etc.

Corollarium IV. $\frac{G}{a}$ porro limes est ejus $\frac{V}{a}$ et generaliter G : a : b : c etc., limes est ejus V : a : b : c.

Propositio VII.

Si quantitas data limes fuerit alicujus variabilis sive crescentis sive decrescentis, aequalitatis ratio, quam vocant, limes est rationis aut decrescentis aut crescentis inter priorem et posteriorem constitutae.

Silicet; si G limes est crescentis vel decrescentis V erit aut G—ΔG : G limes V + ΔG : G aut G+ΔG : g limes V—ΔG : G.

I. Posito G limite crescentis V et ratione G—ΔG : G, erit G—ΔG < G, itaque V adeo augeri potest, ut fiat

$$G—V < G—G+ΔG \text{ i. e. } ΔG. \text{ Sit igitur}$$
$$G—V—ΔV < ΔG: \text{ ergo } G—G+(V+ΔV)$$
$$> G—ΔG \text{ sive } V+ΔV > G—ΔG$$

ergo efficietur V+ΔV : G > G—ΔG : G i. e. major ratione data.

II. Si G crescentis V limes habetur, argumentum eodammodo expeditur. q. e. d.

Propsitio VIII.

Si duae quantitates altera constans, altera variabilis, datae fuerint, et aequalitatis ratio earum-

dem quantitatum limes fuerit, quantitates ipsae altera alterius limes erit, ita quidem, ut si haec aequalitatis ratio rationis $\left(\begin{matrix}\text{decrescentis}\\ \text{crescentis}\end{matrix}\right)$ limes sit, constans illa quantitas sit $\left(\begin{matrix}\text{crescentis}\\ \text{decrescentis}\end{matrix}\right)$ variabilis limes.

Brevius. Si aequalitatis ratio limes fuerit rationis $\left(\begin{matrix}\text{decrescentis}\\ \text{crescentis}\end{matrix}\right)$ $G : V$, erit G limes $\left(\begin{matrix}\text{crescentis}\\ \text{decrescentis}\end{matrix}\right)$ variabilis V.

I. Si aequalitatis ratio decrescentis rationis limes fuerit, ex hyp. $G : V$ minor fieri potest ratione qualibet $G : G - \Delta G$.

Posito igitur $G : V < G . G - \Delta G$, facile intelligitur V posse majorem fieri qualibet quantitate $G - \Delta G$ minore, quam G. Ergo G limes erit crescentis ex def. 1.

II. Sit aequalitatis ratio, rationis crescentis, limes tum ex hyp. $G : V$ major fieri poterit ratione qualibet $G : G + \Delta G$. Quo posito, scilicet $G : V > G : G + \Delta G$, apparet V posse minorem fieri qualibet quantitate $G + \Delta G$ majore, quam G, ergo G limes decrescentis V erit. q. e. d.

Propositio IX.

Si variabilium duarum ratio $\left[\begin{matrix}\text{maior}\\ \text{minor}\end{matrix}\right]$ fueri limituum ipsarum ratione, illa ratio $\left[\begin{matrix}\text{minor}\\ \text{major}\end{matrix}\right]$ fieri

poterit qualibet ratione $\left[\begin{matrix}\text{majore}\\\text{minore}\end{matrix}\right]$ quam limitum ratio.

Breviter. Si G limes V, et

g — — v et $V >< G$ et $v <> g$,

ergo $V : v >< G : g$, $V : v \left[\begin{matrix}\text{minor}\\\text{major}\end{matrix}\right]$ poterit fieri qualibet data ratione, $\left[\begin{matrix}\text{major}\\\text{minor}\end{matrix}\right]$ quam $G : g$.

Posita enim ratione $G : g \mp \Delta g \left[\begin{matrix}\text{majore}\\\text{minore}\end{matrix}\right]$, quam $G : g$, igitur $g \mp \Delta g <> g$, porro sit $\alpha \begin{matrix}>< g \mp \Delta g\\ <> g\end{matrix}$, ita ut habeatur proportio

$$G : g \mp \Delta g = G \mp \Delta G : \alpha.$$

Quum sit $\alpha >< g \mp \Delta g$ (ex const.), est quoque $G >< G \pm \Delta g$ (Elem. V. 14.). Tum fiat $\left[\begin{matrix}V <> G \pm \Delta G\\ v >< \alpha\end{matrix}\right]$, quod ex hyp. licet, fiet igitur $V : \alpha <> G \pm \Delta G : \alpha <> G : g \mp \Delta g$ (ex const.) et $V : v <> V : \alpha$ (ex const.)

eo magis ergo $V : v <> G : g \mp \Delta g$. q. e. d.

Quae propositio exprimi et demonstrari potest etiam sic: Positis G et g limitibus ex ordine variabilium V et v, ratio $\left(\begin{matrix}\text{major}\\\text{minor}\end{matrix}\right)$ fieri poterit data qualibet ratione $G : g \pm \Delta g$, quae sit $\left(\begin{matrix}\text{minor}\\\text{major}\end{matrix}\right)$ quam $G : g$. Namque fiat $\left(\begin{matrix}V <> G \pm \Delta G\\ v <> g \pm \Delta g\end{matrix}\right)$, id quod (ex hyp.)

fieri poterit, quum $V > < G$, etiam

$$V : g \pm \Delta g > < G : g \pm \Delta g \text{ et quum } v < > g$$
$$V : v \quad > < V : g \pm \Delta g, \text{ quo magis}$$
$$V : v \quad > < G : g \pm \Delta g. \quad \text{q. e. d.}$$

Propositio X.

Si quantitates duae heterogenae, quae vel crescant vel decrescant, et quarum quaeque, datam aliquam quantitatem limitem habeat, ad datas duas constantes semper in una eandemque ratione sint, limites earum quoque ad easdem datas quantitates in eadem ratione erunt.

Breviter. Sunto G et g limites variabilium qnantitatum heterogenarum V & v et est $V : m = v : n$ erit

$$G : m = g : n.$$

Argumentum I.

I. G et g limites crescentium quantitatum V et v sunto. Si quis dicat, non esse $G : m = g : n$, erit aut $G : m > g : n$, aut $G : m < g : n$.

1) Si $G : m > g : n$, et statuatur $G - \Delta G : m = g : n$, V major fieri potest, quam $G - \Delta G$, et est igitur

$$G - \Delta G : m < V : m < v : n, \text{ est autem } v < g \text{ ergo}$$
$$\frac{v : n < g : n}{G - \Delta G : m < g : n}$$

Statum vero est, esse $G - \Delta G : m = g : n$ q. e. a.

2) Si $G : m < g : n$, argumentatio eadem erit.

Demonstratum est igitur, nec $G:m > g:n$ nec $G:m < g:n$ esse posse, ergo in rationibus crescentibus $G:m = g:n$ esse debet. q. e. d.

II. At est etiam in quantitatibus decrescentibus $G:m = g:n$. Etenim si non esset $G:m$ $= g;n$, sed

1) $G:m>g:n$, et quidem $G:m=g+\Delta g:n$ ex hyp. $v<g+\Delta g$ fieri potest, igitur

$g+\Delta g:n>v:n>V:m$ est vero $V>G$ ergo

$$\frac{\qquad\qquad V:m > G:m}{g+\Delta g:n \qquad > G:m}$$

statutum vero, $g+\Delta g:n = G:m$, id quod non convenit.

2) Si $G:m<g:n$, argumentatio eodem modo instituitur.

Hinc efficitur, neqne in decrescente, neque in crescente ratione $G:m><g:n$, necessario igitur erit

$$G:m = g:n. \qquad \text{q. e. d.}$$

Argumentatum. II.

I. Sunto G et g limites crescentium V et v, et non sit $G:m = g:n$, erit $G:m$ aut major aut minor, quam $g:n$.

Si $G:m>g:n$, et si queat quidem $G-\Delta G:m$ $=g:n$, si nempe $G-\Delta G<G$. Quum ex hyp. V quantitas crescens variabilis, V major fieri potest quam $G-\Delta G$. Est igitur

$$V:m > G-\Delta G:m$$

ex hyp. est $V:m = v:n$

ex const. $G-\Delta G:m = g:n$

$v:n > g:n$ est igitur $v > g$.

g limes variabilis crescentis, ergo $v < g$, id quod absurdum est. Pariter ostenditur, non esse posse $G:m < g:n$, sed in quantitatibus crescentibus semper haberi $G:m = g:n$.

II. Sunto G et g limites decrescentium V et v, argumentum idem erit. Ergo quum $G:m$ tam in crescentibus, quam in decrescentibus quantitatibus V et v neque major neque minor, quam $g:n$ esse queat, necessario erit $G:m = g:n$. 1) q. e. d.

Propositio XI.

Si quantitates duae variabiles homogeneae fuerint in data quadam ratione, datisque earum limitibus, hi in eadem ratione erunt.

Nempe. Servatis signis prioribus, erit etiam, si $m:n = V:v$, $G:g = m:n$.

I. G et g limites sint crescentinm variabilium, et non sit $G:g = m:n$, tum necesse est, aut $G:g > m:n$ aut $G:g < m:n$.

---

1) L. Valerii de centro gravitatis lib. II. prop. I. cfr. §. 1. sect. II. — Tacquet An. et Cyl. lib. I. pars I. prop. I. §. 5. sect. II. Renaldinus de res. et comp. math. p. 280. theom. VIII. §. 5. sect. II.

1) Si $m:n > G:$ et $m:n = G:g-\Delta g$, ex hyp. fieri licet $v > g-\Delta g$. Quoniam

$$\begin{array}{l} V:v = m:n \text{ ex hyp. et} \\ m:n = G:g-\Delta g \text{ ex const.} \\ \hline \text{sequitur } V:v = G:g-\Delta g \end{array}$$

At ex hyp. $V<G$, ergo etiam (Elem. V. 14.) $v<g-\Delta g$, quod repugnat, quia $v>g-\Delta g$ fieri potest, ergo $m:n > G:g$ non fas est.

2) Si $m:n < G:g$ eadem erit argumentatio. Ergo in variabilibus crescentibus locum non habet $G:g >< m:n$, et quod relinquitur, est $G:g = m:n$:

II. Sint G et g limites decrescentium V et v, et non sit $G:g = m:n$, aut $G:g >$ aut $< m:n$ erit.

1) Si $m:n > G:g$, et quidem $m:n = G + \Delta G:g$, fieri potest $V < G + \Delta G$. Quia autem $V:v = m:n$ ex hyp.

$$\begin{array}{l} m:n = G+\Delta G:g \text{ ex const.} \\ \hline \text{est } V:v = G+\Delta G:g. \end{array}$$

Ex hyp. autem $v > g$, ergo omnino $V > G + \Delta G$, id, quod absurdum est, quum V minor, quam $G + \Delta G$ fieri queat. Itaque non convenit $m:n > G:g$.

2) Si $m:n < G:g$, eadem erit argumentandi ratio.

Ergo in quantitatibus decrescentibus V et v semper

constat m : n = G : g, idem de crescentibus quantitatibus demonstratum, inde generaliter est, si V : v = m : n fuerit, G : g = m : n 1).

Scholium I. L. Valerius specialiter demonstrat, rationem m : n proportionem duplam, sesquialteram etc., duplicatam alicujus etc., omnino nominatam quamlibet esse posse; argumentando vero ad hanc propositionem recurrit 2).

Scholium II. Tacquetus asserit, si ratio, aequalitatis ratio sit, theorema hoc effici:

Si quantitatibus A et B aliae (inscribi / conscribi) possunt, quae et semper aequales sint inter se, et quantitates ipsas A, B exhauriunt, erit quantitas A aequalis quantitati B 3).

Proposito XII.

Si variabiles duae, limitis capaces, ad alias variabiles duas limitis capaces, in ratione sint aequalitatis, limites etiam earum in aequalitatis ratione erant.

---

1) L. Valerius l. c. lib. II. prop. 2. §. 1. Sect. II. Taquet Cyl. et An. Lib. I. pars I. prop. I. — Lib. II. pars II. prop. I. §. 5 Sect. II. —

2) Tacquet Elem. Geom. lib. XII. porisma universale. — Renaldinus. Theorem. IX.

3) Tacquet Cyl. et An. L. I. pars I. prop. I. Cor. L. II. par. I. prop. I. Cor.

Brevius: Si $V:v = V':v'$ etiam est $G:g = G':g'$, puta, si $G\,g\,G'\,g'$ sint ex ordine limites variabilium. $V\,v\,V'\,v'$.

I. 1) Sit $V:v < G:g$ et $V':v' < G':g'$, erit $G:g = G':g'$, nam hoc si non esset, sed $G:g > G':g'$, sitque $G:g - \Delta g = G':g'$.

Hinc cum $G:g - \Delta g < G:g$ sit, $V:v$ major, quam $G:g - \Delta g$ fieri potest, cum igitur $V':v' = V:v$, erit

$V':v' > G:g - \Delta g > G':g'$ est vero ex hyp.
$V':v' < G':g'$ q. e. a.

2) Eodem modo ostenditur, esse non posse $G:g < G':g'$, huic $G:g = G':g'$ esse debet.

II. Haec demonstratio nihil differt ab aequatione prima, si $V:v > G:g$ et $V,:v' > G':g'$ fuerit.

III. At si $V:v < G:g$ et $V':v' > G':g'$ sit, simili tamen demonstratione uti poteris, sit nempe $G:g > G':g'$ et

$$G:g = G':g' - \Delta g'$$

Hinc cum $G':g' - \Delta g' > G':g'$

$V':v' \lessdot G':g' - \Delta g'$ fieri potest, cum igitur
$\underline{V:v = V':v'}$
erit $\overline{V:v\ G':g' - \Delta g'} \lessdot G:g$ q. e. a.

Proposito XIII.

Si data quaedam ratio sit $\left\{ \begin{matrix} \text{minor} \\ \text{major} \end{matrix} \right\}$ duarum variabilium ratione, et data illa variabilis hujus rationis limes, erit ratione inversa quantitas datae

rationis secunda ad primam $\left[\begin{matrix}\text{major}\\ \text{minor}\end{matrix}\right]$, quam secunda rationis variabilis ad primam ejusdem, et data ratio, ita effecta, limes erit variabilis ita effectae rationis.

Breviter: Si $G:g$ ratio sit limitum $V:v$ et $G:g >< V:v$, inverse erit $g:G <> v:V$ et $g:G$ ratio est limitum v et V.

I. Ponatur $V:v < G:g$, invertendo fiet $v:V > g:G$, deinde sit $g + \Delta g : G > g:G$, ergo invertendo $G : g + \Delta g < G:g$. Ex hyp. autem $V:v$ major fieri potest data quaque ratione minore, quam $G:g$, igitur $V:v > G : g + \Delta g$ reddi potest, quo facto, invertendo erit $v:V < g + \Delta g : G$, at semper est $v:V > g:G$. Ergo $g:G$ ratio est limitum $v:V$.

II, Pari modo probatur, si $V:v > G:g$, $g:G$ esse rationem limitum $v:V$.

Proposito XIV.

Si fuerit variabilis quaedam ad alteram variabilem in ratione $\left[\begin{matrix}\text{minore}\\ \text{majore}\end{matrix}\right]$, quam quantitas data una ad alteram, et duarum quantitatum ratio, ratio sit limitum variabilium illarum, erit convertendo data prior ad ipsam, cui demseris alteram datam, ratio limitum prioris variabilis ad ipsam, cui demseris alteram variabilem.

Breviter: Si $V:v \gtrless G:g$, et $G:g$ ratio limitum rationis variabilis $V:v$, convertendo $G:G-g$ ratio limitum variabilis rationis $V:V-v$.

I. Posito $V:v < G:g$, convertendo fit $V:V-v > G:G-g$. Tum

sit $G:G-g-\Delta g > G:G-g$, convertendo erit

$$G:G-G+g+\Delta g < G:G-G+g$$

ergo $G:g+\Delta g < G:g$. At $V:v$ majorem reddere potest, qualibet ratione data, majorem igitur etiam $G:g+\Delta g$, quae minor sit, quam $G:g$. Tum ex $V:v > G:g+\Delta g$ convertendo existit

$V:V-v < G:G-g-\Delta g$ est autem

$V:V-v > G:G-g$. Unde sequitur, esse $G:G-g$ rationem limitum rationis $V:V-v$ (def. 3.).

II. Contra si $V:v > G:g$ fuerit, eodem modo instituitur demonstratio. q. e. d.

Proposito XV.

Si duarum variabilium ratio $\binom{\text{minor}}{\text{major}}$ fuerit duarum datarum quantitatum ratione (quae est ratio limitum rationis duarum variabilium), erit dividendo ratio datae prioris, cui demseris datam alteram, ad hanc alteram ratio limitum variabilis prioris, cui demseris alteram, ad hanc eandem.

Breviter. Si $V:v \lessgtr G:g$ et $G:g$ ratio limitum variabilis rationis $V:v$, erit $G-g:g$ ratio limitum rationis variabilis $V-v:v$.

I. Posito $V:v < G:g$, dividendo erit $V-v:v < G-g:g$, nunc si
$G-g-\Delta g:g+\Delta g < G-g:g$, erit componendo

$$G-g-\Delta g+g-\Delta g:g+\Delta g < G-g+g:g$$

id est $G \qquad :g+\Delta g < G:g$.

Ex hyp. vero $V:v$ major fieri potest data quavis ratione $G:g+\Delta g$, quae sit minor, quam $G:g$, sitque hoc, est ergo

$$V:v > G:g+\Delta g$$

dividendo fit $V-v:v > G-g-\Delta g:g+\Delta g$.

Quoniam igitur $V-v:v$ major fieri potest quavis data ratione $(G-g-\Delta g:g+\Delta g)$, quae minor est quam $G-g:g$, erit limes rationis $V-v:v$ ex def.

II. Contra si $V:v > G:g$, pari ratione ostenditur, esse $G-g:g$ limitem rationis $V-v:v$ q. e. d.

P r o p o s i t o XVI.

Si ratio variabilium duarum quantitatum, et limes alterutrius harum variabilium data fuerit, limes alterius variabilis inveniri potest.

Nempe. Si data sit $V:v$ ratio duarum variabilium per proportionem $V:v=m:n$, porro sit limes G variabilis V, potest g limes v inveniri.

I. G limes sit variabilis crescentis, et fiat $m:n = G:g$, erit g limes variabilis v. Ex hyp. enim habetur

$$V : v = m : n$$

$$\underline{\qquad\qquad m : n = G : g} \text{ ex const.}$$

$$\text{ergo } V : v \;=\; G : g.$$

Ex hyp. $G > V$ ergo $g > v$, et $G - V : g - v = G : g$, ponamus $G - V = V'$ et $g - v = v'$, ita ut sit $V' : v' = G : g = m : n$, erit ergo $v' = V' \frac{n}{m}$. Tum ex const. V' minor fieri potest qualibet quantitate data, idem igitur v' minor fieri potest qualibet data quantitate, est igitur $g > v$; et quoniam v major fieri potest qualibet data quantitate, quae sit minor quam g, unde sequitur g esse limitem v (def. 3.).

II. Quando G variabilis decrescentis limes fuerit, constructio et argumentum mutatis paucis eodemmodo procedit.

P r o p o s i t o XVII.

Si variabiles duae fuerint in ratione $\binom{\text{minore}}{\text{majore}}$, quam limitum ipsarum ratio, et posterior ad tertiam variabilem in ratione fuerit $\binom{\text{majore}}{\text{minore}}$ sive $\binom{\text{minore}}{\text{majore}}$, quam ratio limitum datae posterioris ad tertiam datam, ex aequo erit data prior ad datam tertiam ratio limitum variabilis prioris ad variabilem tertiam.

Breviter. Si $V : v >< G : g$, et respective

$v:V' >< g:G'$, aut $v:V' <> g:G'$ et si $\left(\begin{smallmatrix}G:g\\ g:G'\end{smallmatrix}\right)$ ratio limitum variabilis rationis $\left(\begin{smallmatrix}V:v\\ v:V'\end{smallmatrix}\right)$, ex aequo est $G:G'$ ratio limitum rationis $V:V'$.

I. Ponatur $V:v > G:g$

$$\begin{array}{ll} & \text{et} \quad v:V' > g:G' \\ \hline \text{ex aequo est} & V:V' > G:G' \end{array}$$

Sit $G' > G' - \Delta G'$, et igitur $G:G' - \Delta G' > G:G'$, porro sit $g:G' = g - \Delta g : G' - \Delta G'$ et quia $G' > G' - \Delta G'$ etiam $g > g - \Delta g$, ponatur quantitas $g - \Delta g_1 < g$

$$> g - \Delta g$$

quod fieri potest, tum erit $G:g - \Delta g_1 > G:g$

et $g - \Delta g_1 : G' - \Delta G' > g - \Delta g G' - \Delta G'$.

Quoniam $V:v > G:g_1$ (ex hyp.), ergo $V:v$ minor fieri potest, qualibet data ratione majore, quam $G:g$, ergo $V:v < G:g - \Delta g$, et quum $g:G' < v:V'$ (ex hyp.), habetur $v:V'$ minor quavis data ratione, quae major, quam $g:G'$ i. e. $g - \Delta g : G' - \Delta G'$, factum est, et ergo $v:V' < g - \Delta g_1 : G' - \Delta G$, erit, quoniam $V:v$ major, quam $G:g - \Delta g'$ et $v:V' < g - \Delta g, : G' - \Delta G'$, ex aequo $V:V' < G:G' - \Delta G'$ ergo $G:G'$ limes $V:V'$ (def. 4.).

II. Pariter demonstratur, si $V:v < G:g$ et $v:V' < g:G'$, esse $G:G'$ rationem limitum $V:V'$.

III. Si $G:g<V:v$ et $g:G'>v:V'$ esto

$$\text{a)}\quad G+\Delta G>G$$

ergo $G+\Delta G:G'>G:G'$, fiat jam, ut licet, $V:v<G+\Delta G:g$, ergo ex aequo $V:V'<G+\Delta G:G$; porro

$$\text{b)}\quad G'+\Delta G'>G$$

ergo $G:G'+\Delta G'<G:G'$, fiat, ut licet $v:V'>g:G'+\Delta G'$, praeterea ex hyp. $V:v>G:g$ ergo $V:V'>G:G'+\Delta G'$. Itaque $V:V'$ $\begin{Bmatrix}\text{minor}\\ \text{major}\end{Bmatrix}$ fieri potest, quavis ratione data a, majore b, minore quam $G:G'$, exinde sequitur, esse $G:G'$ rationem limitum $V:V'$.

Corollarium. Si 1, $V:v<>G:g$ 2, $V:v<>G:g$

$v:V'<>g:G'$ $v:V'><g:G'$

$V':v'<>G':g'$ $V':v'<>G':g'$

etc. etc.

habetur $G\ g'$ et hic et illic ratio limitum $V:v'$. Argumentum assertionis prioris nihil habet difficultatis, alterius sic est:

Ponatur a, $G-\Delta G<G$ ergo $G-\Delta G:G'<G:G'$ porro sit $G-\Delta G_1 \begin{smallmatrix}>G-\Delta G\\ <G\end{smallmatrix}$ et $G-\Delta G:g'=G-\Delta G_1:g'+\Delta g'$ ergo $g'+\Delta g'>g'$. Fiat denique id quod etiam licet $V:v>G-\Delta G_1:g$

$$v : V' > g : G' \text{ (ex hyp.)}$$

$$\underline{V' : v' > G' : g' + \Delta g'} \text{ quod possibile est}$$

ergo ex aequo $V : v > G - \Delta G_1 : g' + \Delta g'$

$$> G - \Delta G : g' \text{ (ex const.)}$$

Ponatur b, $g' - \Delta g' < g$ ergo $G : g' - \Delta g' > G : g'$, fiat, ut licet $G' : g' = G' - \Delta G' : g' - \Delta g'$, itaque $G' - \Delta G' < G$. Quoniam

$$V : v < G : g \text{ (ex hyp) fiat}$$

$$v : V' < g : G' - \Delta G' \text{ ut licet}$$

$$\underline{V' : v' < G, - \Delta G' : g' - \Delta g'}$$

ergo $V : v' < G : g' - \Delta g'$.

Quoniam $V : v$ a, major b, minor fieri potest, quavis data ratione, quae sit a, minor b, major, quam $G : g'$, ergo $G : g'$ est ratio limitum variabilis rationis $V : v'$ q. e. d.

Propositio XVIII.

Si e quantitatibus duabus constantibus, quae sunt duarum variabilium limites, posterior fuerit ad tertiam quandam constantem, ut variabilis posterior ad variabilem tertiam quandam, erit constans prior ad constantem tertiam limitum ratio rationis variabilis prioris ad tertiam.

Nempe. Si $G : g$ limitum ratio variabilis rationis $V : v$ et $g : G' = v : V'$, ita quidem, ut G, g, G' quantitates constantes et V, v, V' variabiles significaverint, erit $G : G'$ limitum ratio variabilis rationis $V : V'$

Ex hyp. habetur $V:v <> G:g$
$$\begin{array}{l} \text{et} \quad v:V' = g:G' \\ \hline \text{ergo} \quad V:V' <> G:G' \end{array}$$

Esto igitur $G \mp \Delta G:G' >< G:G'$, fiat, ut par est
$$\begin{array}{ll} & V:v >< G \mp \Delta G:g \\ \text{ex hyp. autem} & v:V' = g \qquad :G \\ \hline \text{ex aequo igitur} & V:V' >< G \mp \Delta G:G. \end{array}$$

Unde prodit, posse $V:V' \left\{\begin{matrix}\text{majorem}\\ \text{minorem}\end{matrix}\right\}$ fieri, data, qualibet ratione $\left\{\begin{matrix}\text{minore}\\ \text{majore}\end{matrix}\right\}$, quam $G:G'$ ergo $G:G'$ ratio est limitum variabilis rationis $V:V'$ q. e. d.

Corollarium. Si $V:v <> G:g, v:V' <> g:G'$, $V':v' >< G':g'$ et $v':V' = g':G'$ etc erit $G:G''$ ratio limitum variabilis rationis $V:V''$.

Propositio XIX.

Si ex quatuor constantibus binae binis ex quatuor variabilibus ita respondeant, ut illae rationem limitum rationis variabilium effingant, summae binarum constantium inter se rationem formabunt, quae est limes rationis variabilis ex summis binarum variabilium compositae.

Nempe. Si $G:g$ et $G':g'$ limitum rationes sint rationum $V:v$ et $V':v'$, habetur $G+G':g+g'$ ratio limitum rationis $V+V':v+v'$.

Nam quum ex hyp. existat

$$\lim. (V:v) = G:g$$

erit $\lim. (V + V':v + V') = G + G':g + G'$

indeque, quum $\lim. (V':v') = G':g'$

ergo ex aequo (prop. 20.)

existit $\lim. (V + V':v + v') = G + G':g + g'$

q. e. d.

Corollarium I. Sub eadem conditione habetur etiam

$\text{Lim} (V + V' + V'' + \text{ etc. } : v + v' + v'' + \text{ etc.}) = G + G' + G'' + \text{ etc. } : g + g' + g'' + \text{ etc.}$

et $\lim. V.V.'V.'' \text{ etc. } : v.v.'v'' \text{ etc.}) = G.'G.'' \text{etc.} : g.g.'g.'' \text{ etc.}$

Corollarium II. Est etiam

$\text{Lim}. (V^n : v^n) = G^n : g^n.$

Propositio XX.

Si e quatuor constantibus binae binis e quatuor variabilibus ita respondeant, ut illae rationem limitum rationis variabilium effingant, differentiae binarum constantium inter se rationem formant, quae est limes rationis e differentiis variabilium compositae.

Breviter. Si $G : g = \lim. (V : v)$ et $G' : g' = \lim. (V' : v')$ evadet $G - G' : g - g' = \lim. (V - V' : v - v')$.

Nam, quum (ex hyp.) $\lim.(V:v)=G:g$

$$\text{et } \lim.(V':v')=G':g'$$

$$\text{est etiam } \lim.(V-V':v-V'=G-G':g-G'$$

$$\underline{\text{et } \lim.(v-V':v-v')=g-G':g-g'}$$

$$\text{ergo ex aequo } \lim.(V-V':v-v')=G-G':g-g'$$

q. e. d.

Corollarium I. Sub eadem conditione habetur:

$G-G'-G''-G'''-\text{etc.}:g-g'-g''-g'''-\text{etc.}$ $=\lim.(V-V'-V''-V'''-\text{etc.}:v-v'-v''-v'''\text{ etc.}$ et facili consecutione

$G:G':G'':G''':\text{etc.}):(g:g':g'':g''':\text{etc.})=\lim.$ $[(V:V':V'':V''':\text{etc.}):(v:v':v'':v'''\text{etc.})]$.

Corollarium II. Nec non $\sqrt[n]{G}:\sqrt[n]{g}=\lim.$ $(\sqrt[n]{V}:\sqrt[n]{v})$.

Propositio XXI.

Si e quatuor variabilibus binae, uni eidemque limitum rationi respondeant, ac si prima et tertia, secunda et quarta in formam binarum summarum componantur, limitum illa ratio rationi summarum quoque istarum respondebit.

Breviter. Si $G:g=\text{Lim.}(V:v)$ et $G:g=\text{Lim.}$ $(V':v')$ est

$$G:g=\text{Lim.}(V+V':v+v')$$

I. Ponamus rationes $V:v$ et $V':v'$ una vel crescere vel decrescere;

tum erit $V:v \gtrless G:g$

$$\underline{V':v' \gtrless G:g}$$

est igitur $V+V':v+v' \gtrless G:g$

Sit $G \pm \Delta G:g \gtrless G:g$, ergo

$$V:v \lessgtr G \pm \Delta G:g$$

$$\underline{\text{et } V'v' \lessgtr G \pm \Delta G:g} \text{ fieri potest}$$

$$\text{ergo } V+V':v+v' \lessgtr G \pm \Delta G:g.$$

Ratio $V:V':v+v'$ potest igitur $\begin{Bmatrix}\text{minor}\\\text{major}\end{Bmatrix}$ fieri qualibet data ratione, $\begin{Bmatrix}\text{majore}\\\text{minore}\end{Bmatrix}$, quam $G:g$, hinc etiam $G:g$ limes erit rationis $V+V':v+v'$.

II. Si vero, dum $V:v$ crescat et $V':v'$ decrescat, ponatur $G \pm \Delta G:g \gtrless G:g$, fiat

$$V:v \lessgtr G+\Delta G:g, \text{ quod licet,}$$

sic erit ex cons. ex hyp. $V':v' \lessgtr G+\Delta G:g$

$$\text{ergo } V+V':v+v' \lessgtr G+\Delta G:g$$

Eadem modo fiat $V':v' \gtrless G-\Delta G:g$

$$\underline{\text{erit } V:v \gtrless G-\Delta G:g}$$

$$\text{ergo } V+V':v+v' \gtrless G-\Delta G:g.$$

Ratio $V+V':v+v'$ potest igitur $\begin{Bmatrix}\text{minor}\\\text{major}\end{Bmatrix}$ fieri qualibet data ratione $\begin{Bmatrix}\text{majore}\\\text{minore}\end{Bmatrix}$, quam $G:g$, hinc $G:g$ ratio limitum rationis $V+V':v+v'$.

Corollarium I. Eodem modo $G:g$ limes rationis est $V+V'=V''+$ etc. : $v+v'+v''+$ etc.

Corollarium II. Item rationis $V.V'.V''$. etc. : $v.v'.v''$.etc.

Corollarium III. Denique rationis $V^n : v^n$.

Propositio XXII.

Si e quatuor variabilibus binae unicidemque limitum rationi respondeant, ac si prima (et major quidem) cum tertia, secunda (et major quidem), cum quarta, in binarum differentiarum formam componantur, eadem limitum ratio harum quoque differentiarum rationi respondebit.

Breviter. Si $G:g = \lim (V:v)$ et $G:g = \lim (V':v')$, et sit $V > V'$, $v > v'$ erit $G:g = \lim (V-V':v-v')$.

I. Ponamus $V:v$ et $V':v'$ simul aut crescere aut decrescere:

$$\text{erit} \quad \begin{array}{l} V:v >< G:g \\ \underline{V':v' >< G:g} \\ \text{ergo } V-V':v-v' >< G:g \end{array}$$

Sit $G\pm\Delta G:g >< G:g$, fiat

$$\begin{array}{l} V:v <> G\pm\Delta G:g \\ \underline{V':v' <> G\pm\Delta G:g} \\ \text{ergo } V-V':v-v' <> G\pm\Delta G:g \end{array}$$

Itaque $V-V':v-v' \left\{ \begin{array}{l} \text{minor} \\ \text{major} \end{array} \right\}$ fieri potest, quavis data ratione $G\pm\Delta G:g$, quae est $\left\{ \begin{array}{l} \text{major} \\ \text{minor} \end{array} \right\}$.

quam $G:g$. Ergo $G:g$ limitum ratio est rationis $V-V':v-v'$ (def. 3. 4.).

II. Quando autem $G:g$ limes rationis $V:v$ crescentis, $V':v'$ autem decrescentis est, ponatur $G \pm \Delta G:g \gtrless G:g$.

$$\begin{array}{ll} \text{Fiat} & V:v < G+\Delta G:g \\ & V':v' < G+\Delta G:g \\ \hline \text{ergo} & V-V':v-v' < G+\Delta G:g. \end{array}$$

Eodem modo fiat $V-V':v-v' > G+\Delta G:g$, ergo $V-V':v-v' \left\{\begin{matrix}\text{minor}\\ \text{major}\end{matrix}\right\}$ fieri potest, qualibet data ratione quae $\left\{\begin{matrix}>\\ <\end{matrix}\right\}$ est, quam $G:G'$, quare $G:g$ ratio limitum est rationis $V-V':v-v'$. q. e. d.

Corollarium I. Pari modo $G:g$ limitum ratio est rationis $V-V'-V''$—etc. : $v-v'-v''$—etc.

Corollarium II. Idemque rationis ($V:V':V''$: etc.) : ($v:v':v''$: etc.)

Corollarium III. Denique rationis $\sqrt[n]{V}:\sqrt[n]{v}$.

Propositio XXIII.

Si cujus rationis variabilis, ex variabili eademque cum incremento aut decremento compositae limitum ratio aequalitatis proportionem reddat, ac si eadem limitum ratio fuerit etiam limitum ratio rationis, ex variabili cum incremento aut decremento et variabili alia compositae, limitum ratio

erit etiam limitum ratio variabilis cum incremento aut decremento alterius variabilis cum decremento aut incremento.

Breviter. Si lim. $(V:V\pm\Delta V) = 1:1$ et lim. $(V\pm\Delta V:V') = G:g$ erit lim. $(V\pm\Delta V:V'\mp\Delta V) = G:g$.

Quia enim ex hyp. lim. $(V:V\pm\Delta V) = 1:1$
et lim. $(V\pm\Delta V:V') = G:g$.
ergo (prop. 18) lim. $(V:V') = G:g$.
Est autem lim. $(V:V+V') = G:g+G$
ex hyp. lim. $(V\pm\Delta V:V) = 1:1$
Ergo lim. $(V\pm\Delta V:V+V') = G:G+g$.
igitur lim $(V\pm\Delta V : V+V'-V\mp V) = G:G+g-G$
sive lim. $(V\pm\Delta V:V'\mp\Delta V)=G:g$. q. e. d.

Propositio XXIV.

Quantitates datae duae, quae sunt unius ejusdemque seriei decrescentium quantitatum limites, aequales sunt inter se.

Nempe. Sint G et g limites seriei decrescentium quantitatum $a+b+c \ldots\ldots +r+$ etc., est $G = g$.

Si quis enim obloequatur, non esse $G = g$, erit aut $G>g$ aut $G<g$.

Tum ex hyp. intelligitur, posse differentiam inter seriem et limites G et g quavis data quantitate minorem fieri. Ergo si $a + b + c \ldots\ldots$

$+ r \ldots + $ etc. $= S$, $G - g = m$ signemus, erit $G - S < m$ i. e. $S > g$ quod cum hypothesi non est consentaneum.

Item si $G < g$ sit $g - G = m$ erit $g - S < m$ i. e. $S > G$, quod neque ipsum cum hypothesi convenit.

Propositio XXV.

Functio quaeque variabilis quantitatis alicujus, quae per dignitates ad exponentes positivos, non ultra unitatem descendentes, evehitur, minor potest fieri qualibet quantitate data, scilicet si variabilis, de qua functio dependet, minor fieri potest qualibet data quantitate.

Functio data si fuerit $F(v) = Av^a + Bv^b + Cv^c + \ldots Lv^l + Mv^m + Nv^n$, ejusque tam coefficientes quam exponentes noti fuerint, v ita sumatur, ut ulla pars seriei datae inde a prima parte Av^a major fiat immediate succedente duplici parte, e. g. si partes immediate succedentes et Av et Bv^b fuerint, etiam sit $Av^a > 2Bv^b$.

I. Si coefficentes omnes positivi sint, erit, quia ex const. quaevis pars duplo major est subsequente, omnis pars major cunctis, quae sequantur, partibus, ergo Av^a major summa ceterarum partium et $F(v) < 2Av^a$. Quoniam v quamlibet quantitatem datam exiguitate superare potest, idem etiam in $2Av^a$ cadet, ergo etiam in $F(v)$.

II. Si vero non omnes coefficientes, excepto primo, positivi sint, erit eo magis $F(v) < 2Av^a$. Cum autem $2Av^a$ minor fieri potest qualibet data quantitate, potest etiam F(v) minor fieri, qualibet data.

III. Quando vero A quoque negativus sit, assertio nihil mutatur, dummodo signa analytica commutentur.

Corollarium I. Quae hic de ratione duplo majori locuti sumus, in omnem rationem majorem extendi possunt.

Accepto numero m integro, positivo, poterit ratio cujuslibet partis seriei, hanc succedentis, major fieri ratione m : 1, ergo $F(v) < \frac{m}{m-1} Av$ erit, igiturque F (v) minor fieri potest qualibet data.

Corollarium II. Quae hic de serie finita expedivimus, eadem in infinitam cadunt, id quod facile assequeris.

Propositio XXVI.

Si qua functio variabilis alicujus quantitatis (quae qualibet data quantitate major fieri possit) per seriem procedens, cujus prima pars quantitas constans, caeterae ex exponentibus, coefficientibus et illa sint compositae, ad primam seriei partem rationem crescentem sive decrescentem efficiat, erit aequalitatis ratio limes istius rationis.

Nempe. Si variabilis data, A, B, C, . . L, M, N, coefficientes, et a, b, c, ... l, m, n exponentes dati, porro si F(v) fuerit functio data sic conformata:

$F(v) = P + Av^a + Bv^b + Cv^c \ldots + Lx^l + Mv^m + Nv^n,$

erit $\lim. (F(v) : P) = 1 : 1.$

Etenim secundum prop. 25 erit $\left\{ \begin{matrix} F(v) < P + 2Av^a \\ F(v) > P - 2Av^a \end{matrix} \right\}$;

atqui rationum $\left\{ \begin{matrix} \text{decrescentium} \\ \text{crescentium} \end{matrix} \right\}$ $P \pm 2Av^a : P$ limes, aequalitatis ratio est, eo magis igitnr aequalitatis ratio limes erit rationis $\left\{ \begin{matrix} \text{decrescentis} \\ \text{crescentis} \end{matrix} \right\}$ $F(v) : V$ sive coefficiens A positivus, sive negativus erit. q. e. d.

Corollarium I. Haec propositio vel in infinito partium numero valet.

Corollarium II. Si duae functiones F(v) et $F(v_0)$, pares ea forma, quae in prop. 26 descripta est, variabili vero diversae inter se referantur, altera ad alteram erit, ut partes earum primae inter se, sive, si functiones datae fuerint

$$F(v) = P + Av^a + Bv^b + Cv^c$$
$$F(v_0) = P_0 + A_0 v_0^{a_0} + B_0 v_0^{b_0} + C_0 v_0^{c_0}$$

erit $F(v) : F(v_0) = P : P_0$

Nimirum constat: $\lim (F(v) : P) = 1 : 1$

$$P : P_0 = P : P_1$$
$$\lim [P_1 : F(v_1)] = 1 : 1$$

ergo $\lim [F(v) : F(v_0)] = 1 : 1.$

Propositio XXIX.

Si qua functio variabilis alicujus quantitatis, quae possit major fieri qualibet quantitate data, per seriem coefficientium et exponentium usque decrescentium data fuerit, aequalitatis ratio limes erit rationis crescentis vel decrescentis inter functionem ipsam et primam partem ejus.

Nempe. Esto v variabilis data, quae possit major fieri qualibet alia data et A, B, C . . . . . L, M, N coefficientes a, b, c . . . . l, m, n exponentes, qui usque decrescant, et e quibus series constet $F(v) = Av^a + Bv + \ldots\ldots + Lv^l + Mv^m + Nv^n$, erit lim. $(F(v) : Av^a) = 1 : 1$.

Quoniam enim

$$F(v) = Av^a + Bv^b + \ldots + Lv^l + Mv^m + Nv^n$$

$$F(v) + v^a(A + B\frac{1}{v^{a-b}} + C\frac{1}{v^{a-c}} + \ldots L\frac{1}{v^{a-l}} + M\frac{1}{v^{a-m}}$$

$$+ N\frac{1}{v^{a-n}}.)$$

et tum $\frac{1}{v}$ minimum quemque valorem induere potest, quia v est maximum, deinde a—b a—c . . . a—l a—m a—n exponentes, qui progrediendo crescunt, quia a b c . . . l m n decrescunt, ergo $\frac{1}{v}$ $\frac{1}{v^{a-b}}$ $\frac{1}{v^{a-b}}$ semper decrescunt.

Hinc sequitur, posse seriem $B\frac{1}{v^{a-b}}+C\frac{1}{v^{a-c}}\ldots$ $N\frac{1}{v^{a-n}}$ quamlibet datam quantitatem exiguitate superare, eaque de causa esse quantitatem A limitem seriei totius.

$$A+B\frac{1}{v^{a-b}}+C\frac{1}{v^{a-c}}\ldots\ldots N\frac{1}{v^{a-n}}$$

At secundum prop. 26. erat

$$\lim\left(A : A + B\frac{1}{v^{a-b}} + \ldots N\frac{1}{v^{a-n}}\right) = 1:1$$

Itaque multiplicando per v^a existit:

$$\lim\left(Av^a + Av^a + Bv^b \;.\;.\; Nv^n\right) = 1:1.$$

aut $\lim\left[Av^a : F(v)\right. = 1 : 1.$

Corollarium. Eadem propositio constat, si seriei partium numerus infinitus fuerit.

Propositio XXVIII.

Si duae series datae fuerint, quarum prior ex numeris 1 2 2 4 . . . cum a ex ordine multiplicatis, posterior vero ex partibns inter se et postremam partem prioris seriei aequalibus constet et numerus partium in serie posteriore tantus sit, quantus in priore, erit dimidium posterioris limes prioris et posterioris seriei dempta parte priore.

Nempe. Si series datae fuerint

$$\begin{array}{l} a+2a+3a+4a \ldots +na = S \\ \underline{na+na+na+na \ldots +na = S'} \end{array}$$

erit $\frac{1}{2}$ S′ limes S et S—na.

Namque, quum

$$\begin{array}{l} a+2a+3a \ldots +na = S \\ \underline{na+na+na \ldots +na = S'} \end{array}$$

habetur etiam $n+(n-2)+(n-3) \ldots = S-S'$,

et $\frac{1}{2}S' < S$ nec non $S' > 2(S-na)$, ergo $\frac{1}{2}$ S′ capax est valoris majoris qualibet quantitate data minore ac S, capax vero minoris qualibet quantitate data majore ac S — na, itaque $\frac{1}{2}$ S limes erit et S et S—na. q. e. d.

§. 7.

Praemissis jam definitionibus ac theorematis his luculenter intelligitur, quid quaeque methodus, quas nominavimus, sibi velit, et qua inter sese relatione teneantur.

Ac primum methodus, quam per explosum, excessum atque defectum appellare receptum est, ea duas summas quantitatum finitarum quaerit, quarum valor determinetur. Dein ostenditur harum summarum limites, neque majores neque minores esse posse valore illo, quem igitur limiti esse aequalem. L. Valerii, C. Renaldini et A. Tacquetii studia effecerunt, ut ea methodus in directam magis transformata sit.

Indivisibilium vero methodus, limitem summae quaerit numeri indefiniti partium infinite parvarum

pro illa quantitatem his proportionalem alius generis ponit, et summam infinite magnam quantitate finita proportionali exprimit.

Post Wallisius serierum summam, primis hujus et ultimis membris exprimere studuit, qua re cognitionem limitum serierum earum obtinuit, quarum numerus membrorum infinitus, ultimum vero membrum zero est. Plana ut exlineis orta, quarum longitudo vero ad legem certam crescit aut decrescit, considerat. Series linearum, quibus plana componuntur, summat et ita varia plana quadrat 1).

Caravagii et Fermatii methodus de maximo et minimo theormatis nititur his:

Quantitate variabili, limiti suo aequali posita, maximum aut minimum oritur, et maximum quidem crescente variabili, minimum vero decrescente ea, quod ex def. 1. 2. perfacile commonstratur. Etenimin exemplo allato si ponas $B = y$, $A = x$, $E = \Delta x$ erit $(y - x)\,x^2 = c$

$$\frac{(y - x - \Delta x)(x + \Delta x)^2 = o}{2yx\Delta x - y\Delta x^2 - 3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2 - \Delta x^3 = o}$$

1) Wallisii opera mathematica. Oyoniae MDCXCV. pap. 355 seq. 489 seq. Arithmetica infinitorum sive methodus inquirendi in Curvilineorum quadraturam, atiaque difficitiorea matheseos problemata 1655. — Tractatus duo, prior de Cycloide et corporibus inde genitis, posterior epistolarum, in qua agitur de cissoide 1659. — Montucla l. c. pag 348. 68. tom. II.

dividendo per Δx evadit

$$2yx - y\Delta x - 3x^2 - 3x\Delta x - \Delta x^2 = o$$

$$\text{ergo} \lim_{\Delta x = o} (2yx - y\Delta x - 3x^2 - 3x\Delta x - \Delta x^2) = o$$

$$\lim_{\Delta x = o} (2yx - 3x + (y - 3x)\Delta x - \Delta x^2) = o$$

$$2yx - 3x^2 = o \quad \text{ergo } x = \tfrac{2}{3}y.$$

Idea consimilis Keplerianae methodo fundamento est. Nam circulo ut polygon laterum infinite multorum considerato, id nihil aliud est, quam limitem polygoni circulum esse; aut sit circulus K et polygon P sit $P = K = \lim_{\Delta P = o} (P + \Delta P)$.

Idem Barrovius exhibet in methodo sua, qua tangentem ad curvam ducit, etenim parabola aequatio est $y^2 = px$ . . . (1) si p parameter, x et y coordinatae fuerint, et dum y circa Δy crescat, x circa Δx crescat, erit igitur

$$(y + \Delta y)^2 = p(x + \Delta x)$$

$$y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 = px + p\Delta x \ . \ . \ . \ (2)$$

hanc si subtraxeris 2 de 1 erit

$$2y\Delta y + \Delta y^2 = p\Delta x$$

quae subtangentis aequatio est. Ex qua jam sequitur

$$\frac{2y\Delta y + \Delta y^2}{\Delta x} = p \quad \text{ergo}$$

$$\lim_{\Delta x = o} \frac{2y\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta x = o} \frac{\Delta y^2}{\Delta x} = \lim p = p = \lim_{\Delta x = o} \frac{2y\Delta y}{\Delta x}$$

$$= 2y \lim_{\Delta x = o} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ergo aequatio tangentis haec erit

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{2y}$$

sive, ut Barovii expressione utar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{2y}$$ ubi Δx infinite parva quantitas est, et ita igitur = o poni potest 1).

Methodorum, quae restant nexum, pars libelli altera docebit.

---

1) Lectiones mathematica auctore Barrovii. Lond. 1701. Montucla l. c. II. pag. 359. seq.

V i t a.

Ludovicus Felix Ofterdinger, Württembergensis, natus sum Biberaci Suevorum (die 18. Maji a. 1810) patre carissimo, Georgio Ludovico, matre dilectissima, Johanna Augusta gente, Seyfferana oriunda. Primis literarum, quibus pueri solent, rudimentis imbutus, et scholis anno aetatis meae quarto decimo relictis, ad mathesin animum applicare coepi, faustis ominibus et duce J. Schoeningero cordatissimo viro, quem primum in mathesi praeceptorem obtigisse mihi grata mente profiteor. Academiae maturus, fecit, ut huc (vere anni 1828) proficiscerer virorum, qui hic degunt nominum splendor atque celebritas. Quam (a. 1828) philosophorum ordo posuerat de limitum theoria, tractavi quaestionem, et quum absolvissem, (a. 1829) praemio ornatus sum aureo. Per tres

quos hic degi, annos mathesi et astronomiae universae omnia addixi studia mea et celeberrimorum virorum auditoria adii, inter quos nominare mihi liceat Dircksenium, Enckenium, Idelerum et Oltmansium, pro quorum erga me huminitati atque officiis pares agere gratias, ego vix possum, referre nequaquam. Nunc ante discessum summos in philosophia honores ambire mihi liceat.

THESES

QUAS UNA CUM DISSERTATIONE SUA DE METHODORUM EXPOSITIONE QUARUM OPE PRINCIPIA CALCULI SUPERIORIS INVENTA SUNT.

DIE XVI. JULII PUBLICE DEFENDET AUCTOR.

OPPONENTIBUS:

E. KNORR, DR. PHIL.
J. SMEDDINK, CAND. PHIL.
C. A. OFTERDINGER.

I.

Theoria atomistica neque nova est neque vera.

II.

Angulus constactus aequalis est zero.

III.

Quadratura circuli geometrice demonstrari potest.

IV.

Planetae, dum circa axin moventur suam, certis obeunt legibus pariter ac in sua circa solem rotatione.